

ФОРМУЛА КОЙДЕ: ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Лебедев В.Н.

Лебедев Владимир Николаевич – старший преподаватель;
Донецкий государственный университет,
г. Донецк, Донецкая Народная Республика

Аннотация: рассмотрена физическая интерпретация эмпирической формулы Койде. Показано, что геометрическая модель Фута связана с радиусами кривизны (частотами). Введение понятия «фазовая масса» как плотности массы-энергии на радиан позволило доказать существование квадратичной зависимости между массами электрически заряженных лептонов. Установлено, что изоморфное сжатие приводит к геометрической прогрессии частот и объясняет иерархию масс поколений лептонов без привлечения дополнительных гипотез. Запись формулы Койде в виде отношения суммы масс покоя, полученных из линейного логарифмического ряда, к квадрату суммы спиновых частот переводит феноменологическое уравнение в динамику топологических дефектов.

Ключевые слова: лептоны, формула Койде, топологические дефекты, фазовая масса, изоморфное сжатие, гиромагнитное отношение.

KOIDE'S FORMULA: A TOPOLOGICAL MODEL

Lebedev V.N.

Lebedev Vladimir Nikolaevich – Senior Lecturer,
DONETSK STATE UNIVERSITY,
DONETSK, DONETSK PEOPLE'S REPUBLIC

Abstract: The physical interpretation of the empirical Koide formula is examined. It is demonstrated that Foot's geometric model is intrinsically linked to the radii of curvature (and corresponding frequencies). The introduction of the concept of "phase mass," defined as the mass–energy density per radian, allows for the proof of a quadratic dependence between the masses of electrically charged leptons. It is established that isomorphic compression leads to a geometric progression of frequencies, thereby explaining the mass hierarchy of lepton generations without invoking additional hypotheses. Reformulating the Koide formula as the ratio of the sum of rest masses (derived from a linear logarithmic series) to the square of the sum of spin frequencies transforms this phenomenological equation into the dynamics of topological defects.

Keywords: leptons, Koide formula, topological defects, phase mass, isomorphic compression, gyromagnetic ratio.

Введение

В 1982 году Ёсио Койде обнаружил удивительно точное соотношение для масс трех заряженных лептонов [1]:

$$\frac{m_e + m_\mu + m_\tau}{(\sqrt{m_e} + \sqrt{m_\mu} + \sqrt{m_\tau})^2} = 2/3. \quad (1)$$

По данным [2], массы электрона, мюона и тау-лептона, равны: $m_e=0,51099895$ МэВ; $m_\mu=105,6583755$ МэВ и $m_\tau=1776,93$ МэВ. Подстановка в уравнение (1) дает значение 0,666664, близкое к 2/3. Высокая точность уравнения (1) доказывает существование тесной связи между массами заряженных лептонов.

В 1994 году Роберт Фут [3] предложил следующую интерпретацию формулы Койде. Рассмотрим вектор масс в пространстве поколений лептонов: $\mathbf{v} = (\sqrt{m_e} + \sqrt{m_\mu} + \sqrt{m_\tau})$. Длина и сумма компонент вектора равны: $|\mathbf{v}| = \sqrt{(m_e + m_\mu + m_\tau)}$; $\sum v_i = \sqrt{m_e} + \sqrt{m_\mu} + \sqrt{m_\tau}$. Тогда уравнение (1) в векторной форме принимает вид:

$$\frac{|\mathbf{v}|^2}{(\sum v_i)^2} = 2/3. \quad (2)$$

Сумма компонент вектора может быть выражена через его проекцию на главную диагональ октанта — направление единичного вектора: $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$; $\sum v_i = \mathbf{v} \cdot (1,1,1) = |\mathbf{v}| \sqrt{3} \cos \theta$. Подставляя в уравнение (2):

$$\frac{|\mathbf{v}|^2}{(\sqrt{3} \cdot |\mathbf{v}| \cdot \cos \theta)^2} = \frac{1}{3 \cos^2 \theta} = 2/3. \quad (3)$$

Отсюда следует: $\cos^2 \theta = 1/2$, угол $\theta = 45^\circ$ и вектор масс $\vec{v}$ лежит на поверхности конуса с углом раствора 45° относительно главной диагонали.

В 2012 году Ежи Кочик [4] связал формулу Койде с теоремой Декарта о касающихся окружностях. Рассмотрим окружности с кривизной: $k_i = \frac{1}{R_i}$, где R_i — некоторые характерные радиусы. Согласно теореме Декарта, если четыре окружности попарно касаются, их кривизны удовлетворяют соотношению: $(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)^2 = 2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2)$. Кочик показал, что определенном выборе кривизны k_4 , формула Койде следует из теоремы Декарта. В модели Кочика три массы лептонов соответствуют квадратам кривизны трёх

окружностей. Четвёртая окружность (нулевая масса) интерпретируется как прямая линия (кривизна равна нулю).

Целью данной работы является объединение моделей Фута и Кочика и перевода феноменологического уравнения Койде в топологическую модель (ТМ), основанную на свойствах физического вакуума.

1. Объединенная модель Фута - Кочика

Объединим модели Фута и Кочика, учитывая, что используемые ниже термины — радиус, кривизна и орбита — являются привычными образами, а физический смысл имеют эквивалентные частоты.

Рассмотрим пространство как бозонный конденсат, состоящий из спаренных топологических дефектов — узлов (первичных фермионов). Использование модели МПК [5] не является критически важной, но позволяет обосновать следующие утверждения: скорость первичного фермиона близка к скорости света и пространство (вакуум) можно представить, как связанные пары первичных фермионов («зарядов Дирака» — в ранних работах [6]).

Сложному орбитально-спиновому движению можно поставить в соответствие определённые частоты. Электромагнитная масса, в соответствии с моделью Кочика, обратно пропорциональна квадрату радиуса, вектор кривизны равен: $\mathbf{k} = (\frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2}, \frac{1}{R_3})$. Компоненты вектора $k_i = \frac{1}{R_i}$ пропорциональны корням из масс: $k_i \sim \sqrt{m_i}$. Скорость движения первичных фермионов в бозонном конденсате постоянна и близка к скорости света c , частота связана с радиусом соотношением $\omega_i = \frac{c}{R_i}$, компоненты вектора кривизны $k_i = \frac{1}{R_i}$ пропорциональны частотам: $k_i \sim \omega_i$, тогда между массами и частотами в объединенной модели Фута-Кочика существует зависимость:

$$m_i \sim \frac{1}{R_i^2} \sim \omega_i^2. \quad (4)$$

Следовательно, эквивалентные частоты в формуле Койде не случайны и подчиняются отношению 2/3.

Назовем «изоморфным сжатием» пропорциональное изменение масштабов с сохранением скорости и углов. При уменьшении радиуса, уменьшится длина окружности. Скорость остаётся постоянной, тогда время одного оборота сократится, а частота пропорционально увеличится. В соответствии с объединенной моделью, при уменьшении радиуса вдвое, масса увеличится в 4 раза. Выбрав в качестве компонент вектора корни из масс, Фут постулировал пропорциональность массы квадрату частоты. В результате, модель не просто устанавливает определенное соотношение между массами лептонов, но и каждому поколению лептонов ставит в соответствие определенную частоту.

Сопоставим пространству базовый масштаб R_0 и частоту F_0 . При сложном спин-орбитальном движении точки возникает условие фазового сопряжения: спиновые частоты должны быть кратны целым числам (1, 2, 4, ...) относительно орбитальной частоты. В противном случае совмещения фаз не произойдёт, и возникнут биения между базовой и смещённой частотами. Рассмотрим это явление на примере цилиндра высотой $2\pi R_0$ и радиусом R_0 . Условие фазового сопряжения при равенстве спин-орбитальных частот соответствует шагу резьбы под углом 45° . Если развернуть поверхность цилиндра на плоскости, тогда траектория движения будет гипотенузой равнобедренного прямоугольного треугольника. Проекция скорости равны:

$$v_{orb} = v_{spin} = \frac{c}{\sqrt{2}}. \quad (5)$$

Изменение длины катета треугольника, при сохранении длины гипотенузы, приведет к изменению угла 45° и сопряжение произойдет с фазовым смещением: изменится высота цилиндра, что эквивалентно изменению относительно базовой частоты $F_0 = \frac{c}{2\pi R_0}$ и нарушению условия кратности.

Поворот орбитального вектора в пространстве приводит к повороту спин - вектора. В результате между знаком спина и электрического заряда возникает соответствие: может существовать только два типа «винтовой резьбы» — правая и левая, причем тип резьбы при повороте «винта» в пространстве не изменяется. Сохранение электрического заряда при вращениях в однородном и изотропном пространстве является следствием неразрывной связи спина и орбиты и, вероятно, лежит в основе калибровочной симметрии $U(1)_{em}$ теоремы Нётер.

2. Изоморфное сжатие и иерархия масс лептонов

Определим частоты, соответствующие 3 поколениям заряженных лептонов. В ТМ используется измененная гипотеза Дирака [6], согласно которой из бозонного конденсата рождаются две стабильные частицы — протон и электрон:

$$AB + AB = A + B(ab) = p + e. \quad (6)$$

Вследствие запрета (аналога принципа Паули) разделенный заряд B (первичный фермион) не может занять базисную орбиту (бозонная группа $ab = AB$) и вытесняется на внешнюю квантованную орбиту: $R_e = 2R_0$, R_e - классический радиус электрона. Формируется комбинация зарядов Дирака (первичных фермионов) вида: $B(ab)$. Вторая разрешенная квантованием орбита равна $\frac{1}{4}R_e = \frac{1}{2}R_0$ соответствует радиусу протона [7] и заполняется зарядом A - это первое удвоение частоты относительно базиса или увеличение в 4 раза относительно внешней орбиты (частоты) электрона.

Рассмотрим заряженные лептоны как изоморфное сжатие с постоянным коэффициентом равным 4 орбиты удаленного первичного фермиона B из группы $B(ab)$. Тогда ряд частот для 3 поколений заряженных лептонов будет равен:

$$\bar{f}_i = 4^{i-1}; i = 1, 2, 3; \bar{f}_1 = 1, \bar{f}_2 = 4, \bar{f}_3 = 16. \quad (7)$$

Нормировка выполняется по частоте электрона $F_e = \frac{c}{2\pi R_e}$ Уровень, соответствующий базовой орбите $R_0 = 0,5R_e$, запрещён, что объясняет отсутствие частицы с массой между электроном и мюоном. Ряд (7) частот является следствием изоморфного сжатия и условия фазового сопряжения, описанного в разделе 1, и одновременно кратен базовой частоте F_0 .

Для определения коэффициента кратности электрона свяжем спиновую частоту электрона с электромагнитным полем (электромагнитной массой), тогда отношению частот можно поставить в соответствие гиромагнитное отношение g :

$$g = \frac{\omega_{spin}}{\omega_{orb}}; \quad (8)$$

$$\omega_{spin} = g \omega_{orb} = 2\omega_{orb}. \quad (9)$$

Введём понятие «фазовой массы» m_ϕ равной массе покоя, на радиан фазового угла. Связь между фазовой массой и массой покоя m_x задается через гиромагнитное отношение $g = 2$:

$$m_x = 2\pi g m_\phi. \quad (10)$$

Для проверки гипотезы изоморфного сжатия составим ряд относительных фазовых масс лептонов:

$$X_1 = 1; X_2 = \frac{m_\mu}{2\pi m_e} \approx 32,9082; X_3 = \frac{m_\tau}{2\pi m_e} \cdot \frac{1}{\eta} \approx 1083,0548. \quad (11)$$

Логарифмы равные: 0; 3,49372 и 6,98754 - образуют арифметическую прогрессию с отклонением $R^2 \sim 1 - 5 \cdot 10^{-11}$, причем отношение логарифмов равно 2,00003, что доказывает существование квадратичной зависимости между массами лептонов. При изоморфном масштабировании учитывается удвоение спиновых частот и коэффициент сжатия равный 4:

$$\frac{X_2}{X_1} \cong \frac{X_3}{X_2} = g \bar{f}_i^2 \approx 32,9 \approx g(4)^2. \quad (12)$$

При составлении логарифмического ряда нормирование выполняется по массе электрона m_e в единицах МэВ. При обратном переходе от логарифма безразмерных величин к массам, размерность восстанавливается путем умножения на коэффициент $\eta = \frac{1}{\text{МэВ}}$. Такой прием является стандартной процедурой при работе с логарифмическими уравнениями.

Восстановленные после логарифмирования массы мюона и тау – лептона, соответственно, равны:

$$m_\mu \cong 2\pi m_e e^{3,4937217} = 105,65837 \text{ МэВ}; \quad (13)$$

$$m_\tau \cong 2\pi m_e e^{(2 \cdot 3,4937217)\eta} = 1776,7568 \text{ МэВ}.$$

Выполним переход от масс покоя к частотам. Оценим коэффициент масштабирования массы покоя мюона: $\bar{m}_\mu = \frac{m_\mu}{m_e} \sim 2\pi e^x$, тогда при $x \approx 3,46$, $\bar{m}_\mu \sim 2\pi g \cdot 16 = 64\pi = 201,3$. Фактическое отношение масс $\approx 206,8$ отличие составляет около $\approx 2,7\%$. Свяжем образовавшийся дефицит массы с энергией, затраченной на поляризацию бозонного конденсата, т.е. на создание электрического поля. Назовем эту часть общей массы «электростатической» или сокращенно «статической» компонентой.

Относительные массы соответствуют относительным частотам (12): электрону соответствует относительная частота равная 1, мюону - частота близкая к резонансу $\bar{f}_2 = 4$ и тау - лептону: $\bar{f}_3 = 16$. Эти частоты кратны базовой частоте и создают две компоненты массы в сумме равные массе покоя. Используя полученные соотношения, и модель Фута-Кочика, перепишем формулу Койде (1) в виде отношения суммы относительных масс покоя (числитель), заданных логарифмической функцией (по массе мюона), к квадрату суммы относительных частот:

$$\frac{1+e^{\gamma(\mu)+m_e\eta e^{2\gamma(\mu)}}}{g(1+4+16)^2} \cong 0,66587, \quad (14)$$

где: $\gamma(\mu) = 3,4937217$. Полученное уравнение объединяет эмпирическое правило, геометрический инвариант и топологическую динамику, связывающую массы лептонов с частотами спин-орбитального сопряжения.

Вращение заряда происходит в электрическом поле, созданным самим зарядом. В результате необходимо учитывать обратное влияние «поляризованного вакуума», вызывающее нарушение сопряжения. Учет этого явления с помощью коэффициента, предложенного Швингером [8], приближает частотно – массовое уравнение по точности к уравнению Койде:

$$\frac{1+e^{\gamma(\mu)+m_e\eta e^{2\gamma(\mu)}}}{g(1+4+16)^2} (1 + \beta) = \frac{2}{3} \cong 0,66664, \quad (15)$$

где: $\beta = \frac{q^2}{\hbar c}$; q , $\hbar$, c – единица электрического заряда, нередуцированная постоянная Планка и скорость света (СГС), соответственно.

Если предположить, что полная масса лептонов пропорциональна суперпозиции частот: $m_i \sim \bar{f}_i^2 + \bar{f}_i = \bar{f}_i(\bar{f}_i + 1)$, тогда

$$\frac{\sum \bar{f}_i(\bar{f}_i+1)}{(\sum \bar{f}_i)^2} \cong \frac{2}{3}. \quad (16)$$

Уравнения (15) и (16) не равносильны и описывают различные процессы: уравнение (15) можно трактовать как связь квантованных частот с массой покоя, а (16) – как соотношение между этими частотами.

Возможно, уравнение (12) прямо не связано с уравнением Койде (1), а устанавливает гармоническую связь между частотами самого пространства: $2^1, 2^2, 2^5, 2^8 (C\# - D - F - G\# - \dots)$.

3. Проверка ТМ

3.1. Zitterbewegung.

Оценим некоторые «тонкие» эффекты на примере электрона. Круговая частота, связанная с классическим радиусом электрона R_e , равна:

$$\omega_e = \frac{c}{R_e} = \frac{m_e c^3}{q^2}, (\text{СГС}) \quad (17)$$

В результате поляризации нарушается сопряжение между частотой конденсата и частотой электрона $\omega_e = \frac{c}{R_e} \neq \frac{c}{2R_0}$. Свяжем рассогласование с возникновением аномалии магнитного момента: $\delta \sim \beta = \frac{q^2}{hc}$. В результате в пространстве возникают колебания (дрожание) пропорциональные смещению частот. Учитывая кратность спин – орбитальных $g = 2$, частота дрожания равна:

$$\omega_{ZB} \sim 2\pi g \beta \omega_e = 2 \frac{q^2}{hc} \cdot \frac{m_e c^3}{q^2} = \frac{2m_e c^2}{h} = 2\omega_c. \quad (18)$$

В теории Дирака [9] частота дрожания - Zitterbewegung равна удвоенной комптоновской частоте ω_c и совпадает с уравнением (18). Дрожание спиновой частоты должно приводить к осцилляциям электромагнитного поля. В ТМ феномен проявляется не только как квантовое свойство волновой функции, но и как наблюдаемый феномен модуляции электромагнитного поля.

3.2. Тест на согласованность ТМ

ТМ позволяет вычислить электромагнитные радиусы лептонов, используя резонансы бозонного конденсата. Сравним полученные радиусы с радиусами Лоренца, вычисленными по фактическим массам лептонов. Квантованные орбиты образуют прогрессию:

$$R_\mu = \frac{R_e}{4} = \frac{R_0}{2}; R_\tau = \frac{R_e}{16} = \frac{R_0}{8} = \frac{R_\mu}{4}. \quad (19)$$

Электромагнитные радиусы в ТМ обратно пропорциональны квадрату частот (фазовым массам):

$$R_{\mu w} \approx \frac{1}{2\pi g} \cdot \frac{R_e}{4^2} = \frac{R_\mu}{16\pi} \approx 0,014 \text{ фм}; \quad (20)$$

$$R_{\tau w} \approx \frac{1}{2\pi g} \cdot \frac{R_e}{16^2} = \frac{R_\mu}{256\pi} \approx 0,00087 \text{ фм}, \quad (21)$$

где индекс μw обозначает волновые (электромагнитные) радиусы. Классические радиусы Лоренца (по аналогии с электромагнитным радиусом электрона) обратно пропорциональны массам покоя [10]:

$$R_\mu^{\text{em}} = R_e \cdot \frac{m_e}{m_\mu} \approx 0,0136 \text{ фм}; \quad (23)$$

$$R_\tau^{\text{em}} = R_e \cdot \frac{m_e}{m_\tau} \approx 0,00081 \text{ фм}. \quad (24)$$

Расхождение между топологическими радиусами по сопряженным частотам и радиусами Лоренца для мюона и тау – лептона, в рамках ТМ, вызвано наличием электростатической массы: $\sim 2,9 \text{ МэВ}$ и $\sim 132 \text{ МэВ}$, соответственно. Рост статической массы при зависимости $\sim \frac{1}{R_x}$, должен был привести к уменьшению относительной доли для тау – лептона в 4 раза по отношению к мюону и составить около 12 МэВ. Наблюдаемое отклонение, может указывать на существование предела плотности энергии электростатического поля.

Если учесть, что электростатические компоненты массы не корректируются и пропорционально статическим массам уменьшить поправку Швингера, тогда для равенства правой части уравнения 2/3, при заданной массе мюона, масса тау – лептона должна быть равна $\sim 1777,0 \text{ МэВ}$.

$$\frac{1+e^{\gamma(\mu)}+m_e \eta e^{\gamma(x)}}{g(1+4+16)^2} k(\tau) = \frac{2}{3}, \quad (25)$$

$k(\tau) \approx 1 + \beta - 0,072\beta$. Решение уравнения Койде (1), при заданных массах электрона и мюона равно: $1776,936 \text{ МэВ}$

Последние измерения массы тау - лептона, выполненное коллаборацией Belle II и включённое в обзор PDG (2024), дают значение массы $1777,09 \pm 0,14 \text{ МэВ}$. Расчетное значение $m_\tau \sim 1777,0 \text{ МэВ}$, близко к центру диапазона экспериментальной погрешности: $1776,95 - 1777,23 \text{ (МэВ)}$.

3.3. Прогноз по четвертому поколению.

Прямое продолжение ряда лептонов по модели Фута меняет структуру уравнения, поскольку угол 45° и трёхмерный вектор масс связаны с тремя поколениями заряженных лептонов. При добавлении четвёртого лептона численное значение соотношения изменится.

Теорема Декарта, лежащая в основе модели Кочкика, применяется к четырём попарно касающимся окружностям и не допускает добавления пятой окружности в той же плоскости. Обобщение на трёхмерное пространство (теорема Содди-Госсета) распространяется для $n + 2$ взаимно касающихся сфер в n – мерном пространстве, но такая модель не связана с формулой Койде. В результате, формула Койде непосредственно не может предсказать существование четвёртого поколения, а её обобщение на большее число поколений потребовало бы новой геометрической интерпретации, и не будет соответствовать коэффициенту 2/3.

В ТМ была доказана квадратичная зависимость массы покоя от номера гармоник бозонного конденсата, не зависящая от коэффициента 2/3. Тогда оценка массы 4 поколения лептонов, если оно существует, дает значение:

$$m_4 \sim \frac{m_t^2}{2\pi} \cong 500 \text{ ГэВ.} \quad (26)$$

Фактором, ограничивающим увеличение массы частиц, является нелинейный рост статической компоненты. Прогноз может быть проверен в обозримом будущем на коллайдерах FCC и ILC.

Заключение

В работе предложена топологическая интерпретация эмпирической формулы Койде для масс заряженных лептонов, основанная на модели структурированного вакуума:

Показано, что угол 45° в интерпретации Фута, связан с условием квадратичной зависимости масс поколений лептонов, а модель Кочика отражает реальное соотношение радиусов кривизны спиновых орбит (частот). Введено понятие фазовой массы как плотности массы-энергии на радиан фазового оборота. Показано, что изоморфное сжатие с коэффициентом 4 приводит к геометрической прогрессии частот, причем: *отношение суммы относительных масс покоя трех поколений заряженных лептонов, к квадрату суммы относительных спиновых частот, близко к 2/3.*

Список литературы / References

1. Koide Y. New Fermion Mass Relation // Phys. Lett. B. 1982. Vol. 120. P. 161–165.
2. Navas S. et al. (Particle Data Group). Review of Particle Physics // Phys. Rev. D. 2024. Vol. 110. 030001. DOI: 10.1103/PhysRevD.110.030001
3. Foot R. A Note on Koide's Lepton Mass Relation // Mod. Phys. Lett. A. 1994. Vol. 9. P. 157–160. (arXiv:hep-ph/9402242)
4. Kocik J. Koide's formula as a relation of Descartes' circle theorem // arXiv:1205.0493 (2012).
5. Лебедев В.Н. Модель планковского конвейера (МПК) образования Вселенной: от первичной материи до вещества // Проблемы науки. 2026. № 3 (96). С. 30. DOI: 10.24412/2413-2101-2026-103026.
6. Лебедев В.Н. Универсальные законы структурированного вакуума: нуклоны и ядерные силы // Проблемы науки. 2024. № 5 (86). С. 17–25. DOI: 10.24411/2413-2101-2024-10502
7. Лебедев В.Н. Комбинационная таблица адронов // Проблемы науки. 2025. № 2 (89). С. 4–12. DOI: 10.24411/2413-2101-2025-10201
8. Schwinger J. On Quantum-Electrodynamics and the Magnetic Moment of the Electron // Phys. Rev. 1948. Vol. 73. P. 416–417.
9. Dirac P.A.M. "The Quantum Theory of the Electron", Proc. R. Soc. Lond. A 117, 610-624 (1928).
10. Lorentz H.A. Electromagnetic Phenomena in a System Moving with any Velocity Less than that of Light // Proceedings of the Royal Netherlands Academy of Arts and Sciences. 1904. Vol. 6. P. 809–831.