

АКСИОМАТИКИ ТЕОРИИ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ И ДИАЛЕКТИКА ПОНЯТИЯ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

Гуц А.К.

*Гуц Александр Константинович – доктор физико-математических наук, профессор,
кафедра информационных технологий и математики,
Сочинский государственный университет,
г. Сочи*

Аннотация: в статье высказывается неудовлетворенность существующими аксиоматиками специальной теории относительности, и анализируются причины этой неудовлетворённости. С точки зрения диалектики подобная неудовлетворённость закономерна и определяется фундаментальной ролью понятий пространства и времени во всех философских системах и физических теориях.

Ключевые слова: аксиоматика, теория относительности, пространство-время, диалектика, возникновение пространства-времени.

AXIOMATIC THEORIES OF SPACE-TIME AND THE DIALECTIC OF THE CONCEPT OF SPACE-TIME

Guts A.K.

*Guts Alexander Konstantinovich – D.Sc. in Mathematical and Physical Sciences, Full Professor,
DEPARTMENT OF INFORMATION TECHNOLOGY AND MATHEMATICS,
SOCHI STATE UNIVERSITY,
SOCHI*

Abstract: in the article the author expresses dissatisfaction with the existing axiomatics of the Special theory of relativity, and analyzes the reasons for this dissatisfaction. From the point of view of dialectics, such dissatisfaction is natural and determined by the fundamental role of the concepts of space and time in all philosophical systems and physical theories.

Keywords: axiomatics, theory of relativity, space-time, dialectics, the emergence of space-time.

УДК 530.12+531.111

Одно из самых замечательных явлений в современной науке – это устойчивый интерес к проблеме построения аксиоматической теории относительности или аксиоматической теории пространства-времени. По существу, теория относительности единственная физическая теория, которую постоянно пытаются формализовать, преследуя одну и ту же цель: нахождение тех *максимально общих принципов*, подчиненных *минимальному числу предельно простых условий*, влекущих представление о пространстве-времени как о четырехмерном псевдоевклидовом многообразии.

Как видим, аксиоматизация теории пространства-времени ставит целью не выведение (доказательство) всех возможных истинных утверждений, касающихся структуры и природы пространства-времени, как это формулировал Гильберт в 6-й проблеме, а только установление его четырехмерности и псевдоевклидовости.

Существует не один десяток математически изящных аксиоматик специальной теории относительности (СТО). В Советском Союзе в 70-е годы в этом направлении работала целая группа математиков, руководимых академиком А.Д. Александровым. Однако, несмотря на серию впечатляющих результатов их исследований (см. [1]), было бы неверно утверждать, что цель создания исчерпывающе полной аксиоматической теории относительности достигнута. Нет чувства удовлетворенности полученными аксиоматиками. Отчасти это подтверждается продолжающимися публикациями на данную тему.

И здесь закономерно задать следующие вопросы:

1. Является ли эта неудовлетворенность следствием того, что избранный путь аксиоматизации на основе представления о пространстве-времени как о мире событий, структура которого определяется причинно-следственными связями¹, наталкивается на препятствие в виде упрощенного теоретического взгляда на пространство-время как на четырехмерное псевдоевклидово многообразие? Другими словам, мы неудовлетворены аксиоматиками, и причина этого в том, что пространство-время в действительности более сложная математическая структура, чем четырехмерное псевдоевклидово

¹ Мы останавливаемся на причинной аксиоматической теории пространства-времени, как на наиболее разработанной А.Д. Александровым [1].

многообразии. За несовершенство, приписываемое объекту, мы расплачиваемся несовершенством аксиоматических построений.

2. Как правило, при аксиоматизации физических теорий используются инструменты теории множеств Кантора, т.е. категории *Sets*. Быть может неудовлетворенность исчезнет, если использовать иную, более совершенную теоретико-топосную категорию, например *Sets^{LoP}* [2]. Так, в статье [3] вместо теории множеств была использована теория категорий, и как результат одна и та же система аксиом приводит одновременно и к специальной теории относительности (СТО) и к общей теории относительности (ОТО) за счет выбора модели построенной теории.

3. Возможно, неудовлетворенность появляется из-за того, что до какого-то момента все аксиоматики были чисто содержательными (в какой-то мере, наглядными) в смысле Гильберта и Бернаиса [4], а следовало обратиться к чисто формальным аксиоматизациям, или к формальным системам. Нечто подобное мы наблюдаем в уже упомянутой статье [3].

4. Наконец, быть может проявляющаяся неудовлетворенность просто следствие заложенного в мышлении исследователя естественного стремления к усовершенствованию понятия пространства-времени? Ведь математические конструкции создаются, как правило, одним человеческим умом, поддерживаются, совершенствуются еще несколькими умами. Но не всеми. И если на определенном временном этапе они не вызывают возражений, то позже в дело вступают новые умы, не во всем согласные с неоспоримым совершенством теоретической конструкции, или видящие, что она нуждается в дополнениях. Иначе, говоря, в существующей конструкции новый ум видит упущенное, забытое, отвергнутое. Она противоречит тому, что новый ум хотел бы в ней видеть. Для него она несовершенна! Начинается дополнение тем, что упущено. В результате получаются всё более общая и более совершенная конструкция. На языке Гегеля новые умы усмотрели, обнаружили противоречия, или лучше сказать неполноту конструкции-теории, и их новый ум устраняет противоречия в полном соответствии с законами диалектики человеческого мышления.

Разберем каждое из изложенных предположений отдельно. Отметим, однако, что слово «неудовлетворенность» предполагает, что соответствующее чувство возникает далеко не у каждого, кто знакомится с предъявляемыми аксиоматиками. Нужно, конечно, иметь необходимую математическую квалификацию. Но и без нее обилие аксиом не способствует спокойному принятию предлагаемой теории².

1. **Неудовлетворенность моделью пространства-времени.** В случае первой неудовлетворенности мы имеем дело с противоречием, возникшем при исследовании теоретизированного пространства-времени (мира событий, наделенного структурой аффинного пространства с псевдоевклидовой метрикой). Мы избрали моделью пространства-времени псевдоевклидово пространство.

Принцип причинности или слишком тонкий (или слишком грубый?) инструмент для того, чтобы наиболее простым способом выразить в допустимых терминах сущность псевдоевклидовой геометрии. Осознанное противоречие находит разрешение в попытке отказа от конкретного теоретизированного пространства-времени. В данном случае от взгляда на пространство-время как на псевдоевклидово многообразие или даже как на многообразие (в математическом смысле этого слова).

Возникает мысль, что желаемая простота аксиоматизации псевдоевклидовой геометрии не может быть достигнута без отказа от классического представления о пространстве-времени как о мире событий, «размещенном» в одном «пространстве».

Один из возможных выходов в этой ситуации следующий. Вводится частично упорядоченное множество P и контрвариантные функторы из категории предпорядка P в категорию множеств *Set*. Возникает элементарный топос *Set^P*, который и есть новое теоретизированное пространство-время. Значениями функтора F на элементах X множества P будут множества $F(X)$. Множество P интерпретируем как совокупность возможных ситуаций получения знания о прошлом. Оно имеет временной частичный порядок, так как должно включать все мыслимые ситуации. Множество $F(X)$ – это события, наблюдаемые в ситуации X . На языке теории относительности $F(X)$ – это (причинные) конусы прошлого. Функтор F можно интерпретировать как поток времени.

Топос *Set^P* – всевозможные потоки времени. Классическое преобразование Лоренца превращается в естественный изоморфизм двух функторов, то есть потоков времени. Таким образом, пространство-время *Set^P*, которое может быть описано как топос Гротендика, уже не «помещается» в одном «пространстве».

²Но и тогда, когда аксиом мало, за этим может скрываться использование понятия или объекта, которые сами раскрываются лишь через большое число аксиом. Например, используя множество вещественных чисел, мы не упоминаем, что это есть множество, удовлетворяющее достаточно большому и сложному числу аксиом.

Отметим, что данное направление исследований не было сколь угодно хорошо разработано. Возможно, и здесь сработало интуитивное чувство, говорящее нам о несовершенстве этого подхода, и в силу этого он остался вне внимания математиков.

2. **Смена математической категории, используемой при аксиоматизации.** В статье [3] автор представил фактически аксиоматику пространства-времени, использующую язык теории категорий. По сути это была формальная аксиоматику пространства времени, поскольку при обращении к ее модели (интерпретации) к категории Кантора *Sets* получали пространство-время специальной теории относительности, а при выборе категории *Top(I)* получали пространство-время общей теории относительности. С 1991 года никто до сих пор не предлагал аксиоматики, охватывающую и СТО и ОТО. Как правило, их аксиоматизировали по отдельности.

Тем не менее, чувство неудовлетворенности осталось, хотя не исключено, что это было следствием несовершенства (лишние условия и пр.) первой подобной аксиоматики.

3. **Новые интересные содержательные аксиоматики пространства-времени.** С момента выхода монографии [1] новых ярких содержательных аксиоматик пространства-времени, а точнее СТО, не было опубликовано. Но привлекательны те аксиоматики, которые пытаются реализовать те или иные философские воззрения великих философов.

Так в статье 1997 года [5] авторы предлагают содержательную систему аксиом пространства-времени Минковского, т.е. специальной теории относительности, являющую собой «дедуктивную теорию пространства-времени, которая является реалистичной, объективной и реляционной. Она реалистична, потому что предполагает существование физических объектов, наделённых конкретными свойствами. Она объективна, потому, что может быть сформулировано без каких-либо отсылок к познающим субъектам или сенсорным полям. Наконец, она реляционная, потому что предполагает, что пространство-время – это не вещь, а комплекс отношений между вещами. Таким образом, первоначальная программа Лейбница была реализована в том смысле, что пространство – это, в конечном счёте, порядок сосуществующих объектов, а время – порядок сменяющих друг друга объектов. В этом контексте авторы показали, что метрические и топологические свойства пространства-времени Минковского сводятся к реляционным свойствам конкретных объектов [5]. Математизация идей Лейбница всегда заслуживает внимания. Достаточно вспомнить семантику Крипке, реализовавшей лейбницеву моналогию и породившей представление о множестве возможных миров, реальность которых бесконечно обсуждается в аналитической философии.

Авторы разделяют единую сущность пространство-время на пространство и время:

$$E_G \times T_u \text{ represents the physical space-time.}$$

А ядром их аксиоматических построений является весьма сложная структура исходных понятий:

$$\mathbf{V} = \{\Xi, P, S_L, E_o, E_G, T_u, +, \cdot, \leq, c\},$$

вобравших в себя вещественные числа, топологическую и метрическую структуры с их многочисленными аксиомами, дополненная еще четырнадцатью аксиомами. Иначе говоря, предлагаемая система аксиом далека от желанного крайне малого числа исходных понятий. Вспомним, два исходных аристотелевских начал Мира – энтелехия (материя) и форма (лишенность формы). Данная аксиоматика фактически возврат к далеко не лучшим аксиоматикам прошлого. Более простые аксиоматики можно найти в [1].

4. **Реляционная теория пространства-времени, основанная на теории физических структур Кулакова-Владимирова.** В последнее десятилетие реляционную теорию пространства-времени развивает и пропагандирует очень авторитетный специалист по теории относительности Ю.С. Владимиров [6]. Реляционная, т.е. основанная на наборах числовых отношений между *первичными, исходными объектами i, k, ...* Таковым у Ю.С. Владимирова являются интервалы s_{ik}^2 между объектами i, k , которыми являются *события*. Если положить, что $s_{ik}^2 = \tau_{ik}^2 - l_{ik}^2$, то при подстановке таких выражений для любых шести объектов имеем обнуляющийся следующий определитель [6, с. 46]:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & s_{ik}^2 & s_{ia}^2 & s_{ib}^2 & s_{ic}^2 & s_{id}^2 \\ 1 & s_{ki}^2 & 0 & s_{ka}^2 & s_{kb}^2 & s_{kc}^2 & s_{kd}^2 \\ 1 & s_{ai}^2 & s_{ak}^2 & 0 & s_{ab}^2 & s_{ac}^2 & s_{ad}^2 \\ 1 & s_{bi}^2 & s_{bk}^2 & s_{ba}^2 & 0 & s_{bc}^2 & s_{bd}^2 \\ 1 & s_{ci}^2 & s_{ck}^2 & s_{ca}^2 & s_{cb}^2 & 0 & s_{cd}^2 \\ 1 & s_{di}^2 & s_{dk}^2 & s_{da}^2 & s_{db}^2 & s_{dc}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

что на языке теории физических структур Кулакова-Владимирова означает установление псевдоевклидовой четырехмерной структуры пространства-времени,

Пространство-время Минковского *возникает* на основе двух аксиом:

- 1) закона в форме вышенаписанного определителя для шести объектов,
- 2) требования выполнения фундаментальной симметрии, т.е. соблюдения закона для любых шести объектов.

Поскольку изучаемые объекты i, k, \dots лишь названы событиями, которые ввел Минковский, строя пространство-время СТО, то мы имеем на верное самую простую аксиоматику СТО, если не считать того, что используются вещественного числа s_{ik}^2 , и набор аксиом их определяющий довольно обширен и достаточно сложен. Более того, подход Ю.С.Владимирова фактически говорит о вторичности понятия пространства-времени, и, естественно, вторичности понятий времени и пространства, поскольку каждое из них не существует в отдельности.

5. **Формальные аксиоматизации понятия пространства-времени.** Наверное, первой чисто классической формальной аксиоматизацией специальной теории относительности была система аксиом, предложенная австралийским логиком Гольдблатом в книге [7]. Напомним, что формальные системы – это набор разрешенных для использования знаков, определение допустимых формул, набор аксиом (выделенные формулы), правила вывода одних формул из других и определение того, что понимается под доказательством. Отсутствует понятие истинных формул; есть только доказуемые формулы (теоремы).

В 1990-е годы и позже формальные аксиоматики массово разрабатывались группой венгерских математиков [8,9]. Однако их статьи нельзя назвать популярными. Физики, как правило, не интересуются даже содержательными аксиоматическими описаниями физических теорий, а освоение формальных аксиоматизацией требует еще и знаний в области математической логики. Математики же в основной своей массе не интересуются физикой. Тем не менее, венгерские математики делают важную работу, которая позволяет глубже понять сущность теории относительности, доказывая те или иные теоремы.

6. **О диалектике понятия пространства-времени.** В четвертом случае из изложенных во Введении соображений, касающихся неудовлетворенности построение аксиоматической теории пространства-времен СТО, неудовлетворенность возникает даже тогда, когда найдено идеально простое описание исследуемого конкретного теоретизированного пространства-времени. Например, существует целый ряд простых аксиоматик специальной теории относительности, основанных на исходном представлении о пространстве-времени как об аффинном пространстве. Аффинная структура более простое понятие, нежели достаточно богатая топология. Но тем не менее развитие аксиоматической теории пространства-времени неизменно приводило к попыткам строить конкретные системы аксиом, ведущие к псевдоевклидовой (или псевдоримановой) геометрии, с использованием понятия топологической структуры (А.Д. Александров, Р.И. Пименов, Н. Buseman и др. [1]). Как видим, здесь речь идет о поиске новых подходов (путей формализации) к описанию конкретного теоретизированного пространства-времени.

Поиски возможных подходов, как правило, опираются на новые факты, добытые при исследовании реального пространства-времени, а также на свежие математические, физические или философские идеи. В результате возникают самые разнообразные более общие теоретические системы, включающие как частный случай псевдоевклидову геометрию. Данный процесс создания новых теорий отличен от пути создания «генетического ряда теоретических систем» по схеме «теория–метатеория» на основе теоремы Гёделя о неполноте, описанной М.Э. Омеляновским (см. приложение к [10]).

Новая теория пространства-времени возникает не в силу того, что в старой обнаруживаются противоречия (парадоксы) вследствие достижимости теорией границ своей значимости, а благодаря самодвижению, диалектическому развитию понятия пространства-времени. При этом исследователь может коренным образом изменить исходные принципы построения теории пространства-времени, отказываясь, в частности, и от принципа причинности (Н. Reichenbach, Ю.Ф. Борисов, J.W. Schutz, W. Gareth, V. Verzi и др.).

Наконец, анализ чувства неудовлетворенности, о котором говорилось выше, наводит на мысль о совмещении двух направлений развития понятия пространства-времени. Впечатление об отсутствии должной простоты в причинном описании пространства Минковского неизбежное следствие естественного процесса усложнения понятия пространства-времени за счет подключения тех свойств реального пространства-времени, которые человеку предстоит еще использовать в своей будущей практической деятельности.

Список литературы / References

1. Гуц А.К. Хроногеометрия. М.: Ленанд, 2017.
2. Moerdijk I., Reyes G.E. Models for Smooth Infinitesimal Analysis, Springer-Verlag, 1991.

3. *Гуц А.К.* Теоретико-топосный подход к основаниям теории относительности // Докл. АН СССР. 1991. Т. 318, № 6. С.1294–1297.
4. *Гильберт Д., Бернайс П.* Основания математики. Т.1. («Логические исчисления и формализация арифметики»). М.: Наука, 1979.
5. *Bergliaffa S.E.P., Romero G.E., Vucetich H.* Steps towards an axiomatic pregeometry of space-time [Электронный ресурс]. URL: <https://arxiv.org/abs/gr-qc/9710064> (Дата обращения: 23.03.2025).
6. *Владимиров Ю.С.* Основания физики. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015.
7. *Goldblatt R.* Orthogonality and spacetime geometry. Berlin: Springer, 1987.
8. *Madarász J.X., Székely G., Stannett M.* Three Different Formalisations of Einstein's Relativity Principle [Электронный ресурс]. URL: <https://arxiv.org/pdf/1702.08519> (Дата обращения: 23.03.2025).
9. *Andrèka H., Madarász J.X., Nèmeti I.* On the logical structure of relativity theories. Budapest: Alfrèd Rènyi Institute of Mathematics, 2002. 1312p. (E-book, with contributions from A. Andai, G. Sági, I. Sain, and Cs. Tòke).
10. *Омельяновский М.Э.* Аксиоматика и поиск основополагающих принципов и понятий в физике / Приложение к Бунге М. Философия физики. М.: Прогресс, 1975.