ОБ ОБОБЩЕННОМ РЕШЕНИИ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Дудко В.Г.[1], Шлопак А.А.[2]

[1]Дудко Владимир Григорьевич - кандидат технических наук, доцент,
[2]Шлопак Александр Анфирович - кандидат технических наук, доцент,
кафедра К-1 «Системы автоматического управления»
Мытищинский филиал Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет),
г. Мытищи

Аннотация: *исследования по решению смешанной задачи для системы дифференциально-функциональных уравнений изложены в [1], [2]. В работах [3], [4] для этих систем рассмотрены непрерывная зависимость решения от начальных условий и правых частей в смысле среднего квадратичного отклонения, доказаны теоремы о непрерывной зависимости частных производных по времени от решения. В данной работе рассматривается система дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка, задаваемая на прямоугольной области. Исследуются условия существования и единственности обобщённого решения задачи при граничных и начальных условиях. Предполагается, что правые части уравнений квадратично суммируемы в заданной области, что позволяет применять методы функционального анализа. Основное внимание уделяется свойствам обобщённого решения. Доказано, что предельная функция последовательности квадратично непрерывных по времени функций сохраняет квадратичную непрерывность. Установлено, что обобщённое решение системы определено с точностью до множества меры нуль и удовлетворяет начальным условиям также с точностью до множества меры нуль. Показано, что изменения начальных условий на множестве линейной меры нуль и правых частей на множестве плоской меры нуль не влияют на обобщённое решение.*
Ключевые слова: *уравнения, функциональный, теорема.*

ON THE GENERALIZED SOLUTION OF A MIXED PROBLEM OF LINEAR SYSTEMS OF DIFFERENTIAL-FUNCTIONAL EQUATIONS

Dudko V.G.[1], Shlopak A.A.[2]

[1]Dudko Vladimir Grigoryevich - PhD in Engineering Sciences, Associate Professor
[2]Shlopak Alexander Anfirovich – PhD in Engineering Sciences, Associate Professor
DEPARTMENT K-1 «AUTOMATIC CONTROL SYSTEMS»
MYTISHCHI BRANCH OF BAUMAN MOSCOW STATE TECHNICAL UNIVERSITY,
MYTISHCHI

Abstract: *studies on solving a mixed problem for a system of differential functional equations are presented in [1], [2]. In [3], [4] for these systems, the continuous dependence of the solution on the initial conditions and the right-hand sides in the sense of the mean square deviation is considered, theorems on the continuous dependence of partial derivatives in time on the solution are proved. In this paper, we consider a system of partial differential equations of the first order, given on a rectangular area. The conditions of existence and uniqueness of the generalized solution of the problem under boundary and initial conditions are investigated. It is assumed that the right-hand sides of the equations are quadratically summable in a given domain, which allows the use of functional analysis methods. The main attention is paid to the properties of the generalized solution. It is proved that the limit function of a sequence of quadratically continuous functions preserves quadratic continuity. It is established that the generalized solution of the system is determined up to the set of measure zero and satisfies the initial conditions also up to the set of measure zero. It is shown that changes in the initial conditions on the set of linear measure zero and the right-hand sides on the set of plane measure zero do not affect the generalized solution.*
Keywords: *equations, functional, theorem.*

УДК 681.51

В [5] был предложен формальный метод решения системы уравнений, а в [6] была доказана теорема существования решения этой системы:

$$
\begin{aligned}
&L\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}+R\mathbf{i}+\bar{T}_1\left[x,y;\mathbf{i}\right]=\mathbf{g}_1\left(x,t\right),\\
&C\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial x}+J\mathbf{u}+\bar{T}_2\left[x,y;\mathbf{i}\right]=\mathbf{g}_2(x,t),
\end{aligned} \tag{1}
$$

$x\in\left[0,l\right],\ t\in\left[0,t^{'}\right],\ l\in\left[0,\infty\right],\ t^{'}\in\left[0,\infty\right].$

Здесь коэффициенты L,R,C и J -- постоянные квадратные матрицы порядка $m\geq 1.$ Кроме того, матрицы L и C - симметричны и положительно определены. Векторы $\mathbf{i}$ и $\mathbf{u}$ порядка m - искомые, их проекции зависят от аргументов x,t в прямоугольнике $\Pi:\ 0\leq x\leq l,\ 0\leq t\leq t^{'}.$

Граничные условия

$$
\mathbf{u}\,|_{x=0}=\mathbf{u}\,|_{x=l}=0 \quad \left(t\in\left[0,t^{'}\right]\right) \tag{2}
$$

Начальные условия

$$
\mathbf{i}\,|_{t=0}=\mathbf{F}\left(x\right),\quad \mathbf{u}\,|_{t=0}=\mathbf{\Phi}\left(x\right)\quad \left(x\in\left[0,l\right]\right) \tag{3}
$$

В данной статье рассмотрим эту систему в предположении, что правые части $\mathbf{g}_1\left(x,t\right)$ и $\mathbf{g}_2\left(x,t\right)$ представляют собой квадратично суммируемые по совокупности аргументов в Π_0 функции. Это означает следующее:

Функции $\mathbf{g}_1\left(x,t\right)$ и $\mathbf{g}_2\left(x,t\right)$ определены на прямоугольнике $\Pi_0=\left\{\left(x,t\right)|\,x\in\left[0,l\right],t\in\left[0,t^{*}\right]\right\}.$ Их квадратичная суммируемость предполагает, что они принадлежат пространству $L_2\left(\Pi_0\right),$ т.е. их квадрат интегрируем на области $\Pi_0.$ Это выражается следующим образом:

$$
\int\limits_{\Pi_0}\left\|\mathbf{g}_1\left(x,t\right)\right\|^2dxdt=\int\limits_0^{t^*}\int\limits_0^{l}\left\|\mathbf{g}_1\left(x,t\right)\right\|^2dxdt=\sum_{k=1}^{m}\int\limits_0^{t^*}\int\limits_0^{l}\left|g_{1,k}\left(x,t\right)\right|^2dxdt<\infty, \tag{4}
$$

$$
\int\limits_{\Pi_0}\left\|\mathbf{g}_2\left(x,t\right)\right\|^2dxdt=\int\limits_0^{t^*}\int\limits_0^{l}\left\|\mathbf{g}_2\left(x,t\right)\right\|^2dxdt=\sum_{k=1}^{m}\int\limits_0^{t^*}\int\limits_0^{l}\left|g_{2,k}\left(x,t\right)\right|^2dxdt<\infty,
$$

где $\mathbf{g}_1\left(x,t\right)\in\Box^{m},\ \mathbf{g}_2\left(x,t\right)\in\Box^{m}.$

Иными словами, квадратичная суммируемость означает, что $\mathbf{g}_1\left(x,t\right)$ и $\mathbf{g}_2\left(x,t\right)$ не имеют «слишком больших» значений по совокупности аргументов x и $t,$ а их поведение на области Π_0 допускает обработку методами функционального анализа. В общем случае квадратичная суммируемость функции по x не гарантирует ее квадратичной непрерывности по $t.$ Действительно, если функция $\mathbf{g}_1\left(x,t\right)$ квадратично суммируема по x при фиксированном $t,$ то она удовлетворяет условию (4), а квадратичная непрерывность по t подразумевает, что функция $\mathbf{g}_1\left(x,t\right)$ изменяется по t «гладко» в квадратичном смысле, т.е.

$$
\lim_{\Delta t\to\infty}\int\limits_0^{l}\left\|\mathbf{g}_1\left(x,t+\Delta t\right)-\mathbf{g}_1\left(x,t\right)\right\|^2dx=0.
$$

В этом случае квадратичная непрерывность по t характеризует плавное изменение функции с течением времени. Квадратичная суммируемость по x и квадратичная непрерывность по t — это разные свойства, которые не связаны напрямую. Однако, если рассматривать предельную функцию, сходящуюся в среднем по x последовательности квадратично непрерывных по t функций, то эта предельная функция также будет квадратично непрерывной по $t.$

Пусть $\left\{\mathbf{g}_{1n}\left(x,t\right)\right\}$ - последовательность функций, каждая из которых квадратично непрерывна по $t:$

$$
\lim_{\Delta t\to\infty}\int\limits_0^{l}\left\|\mathbf{g}_{1n}\left(x,t+\Delta t\right)-\mathbf{g}_{1n}\left(x,t\right)\right\|^2dx=0.\quad \forall n \quad \text{и}
$$

последовательность $\left\{\mathbf{g}_{1n}(x,t)\right\}$ сходится в среднем по x к функции $\mathbf{g}_1(x,t)$:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^l \left\|\mathbf{g}_{1n}(x,t+\Delta t)-\mathbf{g}_1(x,t)\right\|^2 dx=0,\quad \forall t.$$

Тогда, чтобы доказать квадратичную непрерывность $f(x,t)$ по t, проверим, что:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\int_0^l \left\|\mathbf{g}_1(x,t+\Delta t)-\mathbf{g}_1(x,t)\right\|^2 dx=0.$$

Рассмотрим разность

$$\left\|\mathbf{g}_1(x,t+\Delta t)-\mathbf{g}_1(x,t)\right\|=$$

$$\left\|\left[\mathbf{g}_1(x,t+\Delta t)-\mathbf{g}_{1n}(x,t+\Delta t)\right]+\left[\mathbf{g}_{1n}(x,t+\Delta t)-\mathbf{g}_{1n}(x,t)\right]+\left[\mathbf{g}_{1n}(x,t)-\mathbf{g}_1(x,t)\right]\right\|$$

Введем обозначения:

$$A_n=\mathbf{g}_1(x,t+\Delta t)-\mathbf{g}_{1n}(x,t+\Delta t),$$

$$B_n=\mathbf{g}_{1n}(x,t+\Delta t)-\mathbf{g}_{1n}(x,t),$$

$$C_n=\mathbf{g}_{1n}(x,t)-\mathbf{g}_1(x,t).$$

Так как для каждой компоненты $g_{1n}(x,t)\to g(x,t)$ в среднем по $x,$ то это эквивалентно

$$\left\|A_n\right\|^2=\int_0^l \left\|A_n(x)\right\|^2 dx=\sum_{k=1}^{m}\int_0^l \left|g_k(x,t+\Delta t)-g_{n,k}(x,t+\Delta t)\right|^2 dx<\varepsilon,$$

где $g_{n,k}(x,t)$ обозначает k -ю компоненту функции $\mathbf{g}_{1n}(x,t)$.

Для B_n выполняется квадратичная непрерывность по t для каждой компоненты:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left\|B_n\right\|^2=\lim_{\Delta t\to 0}\sum_{k=1}^{m}\int_0^l \left|g_{n,k}(x,t+\Delta t)-g_{n,k}(x,t)\right|^2 dx=0.$$

Аналогично имеем оценку для C_n:

$$\left\|C_n\right\|^2=\int_0^l \left\|C_n(x)\right\|^2 dx=\sum_{k=1}^{m}\int_0^l \left|g_{n,k}(x,t)-g_k(x,t)\right|^2 dx<\varepsilon,$$

Подставляя оценки в суммарную формулу, получим

$$\int_0^l \left\|\mathbf{g}_1(x,t+\Delta t)-\mathbf{g}_1(x,t)\right\|^2 dx\le 3\left\|A_n\right\|^2+3\left\|B\right\|^2+3\left\|C_n\right\|^2.$$

Используя малость $A_n, B_n, C_n,$ а также их сходимость к нулю, получаем

$$\lim_{\Delta t\to 0}\int_0^l \left\|\mathbf{g}_1(x,t+\Delta t)-\mathbf{g}_1(x,t)\right\|^2 dx=0.$$

Под обобщенным решением системы уравнений (1), (2), (3) будем понимать векторные функции $\mathbf{i}(x,t)$ и $\mathbf{u}(x,t),$ квадратично непрерывные по t в $\overline{\Pi}_0$ при граничных условиях (2), если найдутся последовательности непрерывных функций $\mathbf{g}_{1,n}(x,t)$ и $\mathbf{g}_{2,n}(x,t),$ сходящимся в среднем по $x,$ t соответственно к $\mathbf{g}_1(x,t)$ и $\mathbf{g}_2(x,t),$ и последовательности непрерывно дифференцируемых в $\overline{\Pi}_0$ функций $\mathbf{i}_n(x,t)$ и $\mathbf{u}_n(x,t),$ сходящиеся в среднем по x соответственно к $\mathbf{i}(x,t)$ и $\mathbf{u}(x,t),$ причем

$$L\frac{\partial \mathbf{i}_n}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial x}+R\mathbf{i}_n+\bar{T}_1[x,t;\mathbf{i}_n]=\mathbf{g}_{1,n}(x,t),$$
$$C\frac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{i}_n}{\partial x}+G\mathbf{u}_n+\bar{T}_2[x,t;\mathbf{u}_n]=\mathbf{g}_{1,n}(x,t),$$
$$\mathbf{u}_n\,|_{x=0}=\mathbf{u}_n\,|_{x=l}=0,\quad \left(0\le t\le t^{'}\right).$$

Так как квадратично непрерывная по t функция определена при каждом t с точностью до множества меры нуль по $x,$ то и обобщенное решение также определено при каждом t с точностью до множества меры нуль по $x.$ Вследствие этого, обобщенное решение может удовлетворять начальным условиям (3) также с точностью до множества меры нуль. Обобщенное решение не изменится, если начальные условия изменить на множестве линейной меры нуль, а правые части на множестве плоской меры нуль. Ясно, что при непрерывных правых частях обычное (т.е. непрерывно дифференцируемое) решение, удовлетворяющее граничным условиям (2) в обычном смысле, является одновременно также и обобщенным решением при граничных условиях (2). Обобщенное решение системы уравнений (1) при граничных условиях (2), удовлетворяющее заданным начальным условиям (3), существует и единственно. Об этом говорит следующая теорема.

Теорема. Если начальные условия $F\left(x\right)$ и $\Phi\left(x\right)$ квадратично суммируемы на отрезке $0\le x\le l,$ а правые части системы уравнений (1) $\mathbf{g}_1\left(x,t\right)$ и $\mathbf{g}_2(x,t)$ квадратично суммируемы в прямоугольнике $\bar{\Pi}_0,$ то существует и притом единственное обобщенное решение системы уравнений (1) при граничных условиях (2), удовлетворяющее с точностью до множества меры нуль начальным условиям (3).

Список литературы / References

1. *А.Д. Мышкис* “Смешанные функционально-дифференциальные уравнения”, Новые проблемы теории функционально-дифференциальных уравнений, СМФН, 4, МАИ, М., 2003, 5–120; Journal of Mathematical Sciences, 129:5 (2005), 4111–4226
2. *А.Д. Мышкис* “Начальная задача для смешанных функционально-дифференциальных уравнений”, Автомат. и телемех., 1999, № 3, 170–179; Autom. Remote Control, 60:3 (1999), 436–444
3. *Дудко В.Г., Сумительнов В.Н., Шлопак А.А*. «Решение одной смешанной задачи для системы телеграфных уравнений методом разделения переменных» Проблемы современной науки и образования 2017. № 33 (115), 27-33.
4. *Шлопак А.А.* Решение смешанной задачи для линейных систем дифференциально-функциональных уравнений с постоянными коэффициентами при простейших граничных условиях, Проблемы современной науки и образования 2017. № 16 (98), 26-30.
5. *Шлопак А.А.* О решении смешанной задачи линейных систем дифференциально-функциональных уравнений. Проблемы современной науки и образования 2021. № 11 (168), 34-41.
6. *Дудко В.Г., Шлопак А.А.* О теореме существования смешанной задачи линейных систем дифференциально-функциональных уравнений. Проблемы современной науки и образования 2022. № 9 (178), 21-27.