О ТЕОРЕМЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.

Дудко В.Г.[1], Шлопак А.А.[2]

[1]Дудко Владимир Григорьевич - кандидат технических наук, доцент;
[2]Шлопак Александр Анфирович - кандидат технических наук, доцент,
Кафедра К-1 «Системы автоматического управления»,
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет),
г. Мытищи

Аннотация: *исследования по решению смешанной задачи для системы дифференциально-функциональных уравнений изложены в[1],[2]. В работах [3],[4] для этих систем рассмотрены непрерывная зависимость решения от начальных условий и правых частей в смысле среднего квадратичного отклонения, доказаны теоремы о непрерывной зависимости частных производных по времени от решения. В [5] приведено формальное решение системы дифференциально-функциональных уравнений, а в данной статье рассматривается доказательство теоремы о существовании решения этой системы. При доказательстве используются общеизвестные свойства коэффициентов Фурье. Для операторов типа Вольтерра предполагается наличие непрерывных частных производных по времени до соответствующего порядка.*
Ключевые слова: *уравнения, функциональный, теорема*

ON THE THEOREM OF THE EXISTENCE OF A MIXED PROBLEM OF LINEAR SYSTEMS OF DIFFERENTIAL-FUNCTIONAL EQUATIONS

Dudko V.G.[1], Shlopak A.A.[2]

[1]Dudko Vladimir Grigoryevich - PhD in Engineering Sciences, Associate Professor;
[2]Shlopak Alexander Anfirovich – PhD in Engineering Sciences, Associate Professor,
DEPARTMENT K-1 «AUTOMATIC CONTROL SYSTEMS»
MYTISHCHI BRANCH OF BAUMAN MOSCOW STATE TECHNICAL UNIVERSITY,
MYTISHCHI

Abstract: *Studies on solving a mixed problem for a system of differential-functional equations are presented in [1], [2]. In works [3], [4] for these systems, the continuous dependence of the solution on initial conditions and right parts in the sense of mean quadratic deviation is considered, theorems on the continuous dependence of partial time derivatives on the solution are proved. In [5], a formal solution of the system of differential-functional equations is given, and in this article the proof of the theorem on the existence of a solution to this system is considered. In proving, the well-known properties of Fourier coefficients are used. For operators of the Volterra type, it is assumed that there are continuous partial derivatives in time up to the corresponding order.*
Keywords: *equations, functional, theorem*

УДК 681.51

В [5] был предложен формальный метод решения системы уравнений

$$\begin{aligned} L\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}+R\mathbf{i}+\overline{T}_1\left[x,y;\mathbf{i}\right]=\mathbf{g}_1, \\ C\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial x}+J\mathbf{u}+\overline{T}_2\left[x,y;\mathbf{i}\right]=\mathbf{g}_2, \end{aligned} \qquad (1)$$

$x\in\left[0,l\right],\ t\in\left[0,t'\right],\ l\in\left[0,\infty\right],\ t'\in\left[0,\infty\right].$

Здесь коэффициенты L, R, C и J -- постоянные квадратные матрицы порядка $m \geq 1.$ Кроме того, матрицы L и C - симметричны и положительно определены. Векторы $\mathbf{i}$ и $\mathbf{u}$ порядка m - искомые, их проекции зависят от аргументов x, t в прямоугольнике $\Pi:\ 0 \leq x \leq l,\ 0 \leq t \leq t'.$

Граничные условия

$$\mathbf{u}|_{x=0}=\mathbf{u}|_{x=l}=0 \quad \left(t\in\left[0,t'\right]\right) \qquad (2)$$

Начальные условия

$$\mathbf{i}|_{t=0}=\mathbf{F}(x),\quad \mathbf{u}|_{t=0}=\mathbf{\Phi}(x)\quad \left(x\in[0,l]\right) \qquad (3)$$

Докажем теорему о существования решения системы дифференциально-функциональных уравнений (1) при граничных условиях (2) и начальных условиях (3).

Теорема.

Пусть начальные условия (3) при $x\in[0,l]$ и правые части системы уравнений (1) в Π имеют непрерывные производные всех порядков. Кроме того,

$$\mathbf{F}^{(2p+1)}(0)=\mathbf{F}^{(2p+1)}(l)=\mathbf{\Phi}^{(2p)}(0)=\mathbf{\Phi}^{(2p)}(l)=0,\quad (p=0,1,...),$$

$$\frac{\partial^{(2p+1)}}{\partial x^{2p+1}}\mathbf{g}_1|_{x=0}=\frac{\partial^{(2p+1)}}{\partial x^{2p+1}}\mathbf{g}_1|_{x=l}=\frac{\partial^{(2p)}}{\partial x^{2p}}\mathbf{g}_2|_{x=0}=\frac{\partial^{(2p)}}{\partial x^{2p}}\mathbf{g}_2|_{x=l}=0\quad \left(p=0,1,...;0\le t\le t^{'}\right).$$

Пусть, операторы $\bar{T}_1[x,t,\mathbf{i}]$ и $\bar{T}_2[x,t,\mathbf{u}]$, при некотором $p\ge 0$ удовлетворяют условию $\left(\tilde{W}_p\right)$. Это условие состоит в том, что для непрерывных векторных функций $\mathbf{I}(t)$ и $\mathbf{U}(t)$ имеет место

$$\bar{T}_1\left[x,t;\mathbf{I}(t),X(x)\right]\equiv T_1\left[t;\mathbf{I}(t)\right]X(x),$$

$$\bar{T}_2\left[x,t;\mathbf{U}(t),\tilde{X}(x)\right]\equiv T_2\left[t;\mathbf{U}(t)\right]\tilde{X}(x)$$

($X(x)$ и $\tilde{X}(x)$ - любые скалярные непрерывные функции x), где $T_1\left[t;\mathbf{I}(t)\right]$ и $T_2\left[t;\mathbf{U}(t)\right]$ - операторы, удовлетворяющие условию $\left(W_p\right)$, которое состоит в том, что если для некоторого целого $p\ge 1$ и некоторого целого $p^{'}\in[0,p]$, в Π существуют все непрерывные частные производные

$$\frac{\partial^k\mathbf{i}_s}{\partial t^k},\frac{\partial^k\mathbf{u}_s}{\partial t^k}\ \left(k=\overline{0,p^{'}}\right),\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^k\mathbf{i}_s}{\partial t^k}\right),\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^k\mathbf{u}_s}{\partial t^k}\right)\left(k=\overline{0,p^{'}-1}\right),\ (s=1,2)$$

то операторы $T_\nu[x,t;\mathbf{i},\mathbf{u}]$ $(\nu=1,2)$ имеют в Π непрерывные частные производные по t до $p^{'}$ -го порядка включительно, причем найдется такое постоянное число μ_p, что будет справедливо равенство

$$\left[\frac{\partial^{p^{'}}}{\partial t}\left(T_\nu[x,t;\mathbf{i}_1,\mathbf{u}_1]-T_\nu[x,t;\mathbf{i}_2,\mathbf{u}_2]\right)\right]^2\le\mu_p\{\sum_{k=0}^{p^{'}-1}(\left[\frac{\partial^k}{\partial t^k}(\mathbf{i}_1-\mathbf{i}_2)\right]^2+$$

$$+\left[\frac{\partial^k}{\partial t^k}(\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2)\right]^2)+\int_0^t\sum_{k=0}^{p^{'}}\left[\left[\frac{\partial^k}{\partial\tau^k}(\mathbf{i}_1-\mathbf{i}_2)\right]^2+\left[\frac{\partial^k}{\partial\tau^k}(\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2)\right]^2\right]d\tau\}$$

$$(t\in[0,t^{'}],\ x\in[0,l],\ \nu=1,2)$$

Тогда решение системы (1), удовлетворяющее граничным условиям (2) и начальным условиям (3), существует в Π, имеет непрерывные производные всех порядков, в которых дифференцирование по t участвует не более $p+1$ раз.

Доказательство.

Уравнение [1]

$$\mathbf{z}_k^{'}(t)+M_k\mathbf{z}_k(t)+T\left[t;\mathbf{z}_k(t)\right]=\mathbf{h}_k(t),$$

где M_k - матрица $2m$ - го порядка

$$M=\begin{pmatrix} L^{-1} & \frac{k\pi}{l}L^{-1} \\ -\frac{k\pi}{l}C^{-1} & C^{-1}J \end{pmatrix}.$$

перепишем в виде

$$\mathbf{z}_k^{'}(t)+M_k\mathbf{z}_k(t)=\mathbf{h}_k(t)-T\left[t;\mathbf{z}_k(t)\right]. \qquad (4)$$

Считая известной правую часть уравнения (4), получим, что решение этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $\mathbf{z}_k(0)=\mathbf{z}_{k0}$, будет

$$\mathbf{z}_k(t)=e^{-M_kt}\left\{\mathbf{z}_{k0}+\int_0^t e^{M_k\tau}\left[\mathbf{h}_k(\tau)-T[\tau;\mathbf{z}_k]\right]d\tau\right\}. \qquad (5)$$

Из (5) следует, что

$$\left|\mathbf{z}_k(t)\right|\le\left|e^{-M_kt}\right|\left\{\left|\mathbf{z}_{k0}\right|+\int_0^t\left|e^{M_k\tau}\right|\left[\left|\mathbf{h}_k(\tau)\right|+\left|T[\tau;\mathbf{z}_k]\right|\right]d\tau\right\},$$

откуда

$$\left|\mathbf{z}_k(t)\right|^2\le2\left|e^{-M_kt}\right|^2\left\{\left|\mathbf{z}_{k0}\right|^2+\int_0^t\left|e^{M_k\tau}\right|^2\left[\left|\mathbf{h}_k(\tau)\right|^2+\left|T[\tau;\mathbf{z}_k]\right|^2\right]d\tau\right\}. \qquad (6)$$

Далее имеем

$$\left|e^{-M_kt}\right|^2\le\lambda_1,\quad \left|e^{M_kt}\right|^2\le\lambda_2, \qquad (7)$$

где $\lambda_1>0$ и $\lambda_2>0$ - числа, не зависящие от k.

$$\left|\mathbf{h}_k(\tau)\right|^2\le\max_{0\le t\le t^{'}}\left|\mathbf{h}_k(\tau)\right|^2,$$

$$\left|T[\tau;\mathbf{z}_k]\right|^2\le\mu\int_0^t\left|\mathbf{z}_k(\tau)\right|^2d\tau. \qquad (8)$$

Подставляя оценки (7),(8) в неравенство (6), получим:

$$\left|\mathbf{z}_k(t)\right|^2\le2\lambda_1\left\{\left|\mathbf{z}_{k0}\right|^2+2\lambda_2t^{'2}\max_{0\le t\le t^{'}}\left|\mathbf{h}_k(t)\right|^2+2\lambda_2t^{'}\mu\int_0^t\left(\int_0^\tau\left|\mathbf{z}_k(\sigma)\right|^2d\sigma\right)d\tau\right\},$$

или

$$\left|\mathbf{z}_k(t)\right|^2\le\eta_k+\theta\int_0^t\left|\mathbf{z}_k(\tau)\right|^2d\tau, \qquad (9)$$

где

$$\eta_k=2\lambda_1\left(\left|\mathbf{z}_{k0}\right|^2+2\lambda_2t^{'2}\max_{0\le t\le t^{'}}\left|\mathbf{h}_k(t)\right|^2\right),$$

$$\theta=4\lambda,\lambda_2=\mu t^{'2}.$$

Из (9) будем иметь

$$\left|\mathbf{z}_k(t)\right|^2\le\eta_ke^{\theta t}. \qquad (10)$$

Из общеизвестных свойств коэффициентов Фурье следует, что проекции каждого из векторов $\mathbf{i}_{k0}$, $\mathbf{u}_{k0}$, $\mathbf{g}_{1k}^{(p)}(t)$ и $\mathbf{g}_{2k}^{(p)}(t)$ $(p=0,1,.)$ при $k\to\infty$ стремятся к нулю быстрее любой отрицательной степени k (равномерно по t для $t\in\left[0,t^{'}\right]$); это свойство для краткости назовем «свойством (A) ».

Из неравенства (10) следует, что свойством (A) обладают и проекции вектора $\mathbf{z}_k(t)$. Свойством (A) обладают также проекции векторов

$$\mathbf{z}_k^{'}(t),\mathbf{z}_k^{''}(t),...,\mathbf{z}_k^{(p+1)}(t).$$

Действительно, из равенства (4) имеем:

$$\left|\mathbf{z}_k^{'}(t)\right|\le\left|M_k\right|\left|\mathbf{z}_k(t)\right|+\left|\mathbf{h}_k(t)\right|+\left|T\left[t;\mathbf{z}_k(t)\right]\right|,$$

откуда

$$\left|\mathbf{z}_k^{'}(t)\right|^2 \le 4\left(\left|M_k\right|^2\left|\mathbf{z}_k(t)\right|^2+\left|\mathbf{h}_k(t)\right|^2+\left|T\left[t;\mathbf{z}_k(t)\right]\right|^2\right), \qquad (11)$$

Теперь оценим $\left|T\left[t;\mathbf{z}_k(t)\right]\right|^2$ с помощью условия (W), которое состоит в следующем: существует такое постоянное число $\mu \ge 0,$ для любых пар непрерывных в Π векторных функций $\mathbf{i}_1, \mathbf{u}_1$ и $\mathbf{i}_2, \mathbf{u}_2$ имеет место неравенство

$$\left(T_\nu\left[x,t;\mathbf{i}_1,\mathbf{u}_1\right]-T_\nu\left[x,t;\mathbf{i}_2,\mathbf{u}_2\right]\right)^2 \le \mu\int_0^t\left[\left(\mathbf{i}_1-\mathbf{i}_2\right)^2+\left(\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2\right)^2\right]d\tau$$

$$\left(\nu=1,2;x\in[0,l];t\in\left[0,t^{'}\right]\right).$$

Учитывая (10) имеем :

$$\left|T\left[t;\mathbf{z}_k(t)\right]\right|^2 \le \mu\int_0^t\left|\mathbf{z}_k(\tau)\right|^2 d\tau \le \mu\eta_k\int_0^t e^{\theta\tau}d\tau=\frac{\mu\eta_k}{\theta}\left(e^{\theta t}-1\right) \qquad (12)$$

(если $\theta=0,$ то в правой части должно быть $\mu\eta_k t$).

Из неравенств (11) и (12) получим:

$$\left|\mathbf{z}_k^{'}(t)\right|^2 \le 4\left(\left|M_k\right|^2\left|\mathbf{z}_k(t)\right|^2+\left|\mathbf{h}_k(t)\right|^2+\frac{\mu\eta_k}{\theta}\left(e^{\theta t}-1\right)\right).$$

Поэтому (так как $\left|M_k\right|$ при $k\to\infty$ возрастает не быстрее первой степени k) и следует, что $\mathbf{z}_k^{'}(t)$ обладает свойством (A).

Дифференцируя обе части равенства (4), получим:

$$\mathbf{z}_k^{''}(t)=-M_k\mathbf{z}_k^{'}(t)+\mathbf{h}_k^{'}(t)-T^{'}\left[t;\mathbf{z}_k(t)\right].$$

Следовательно,

$$\left|\mathbf{z}_k^{'''}(t)\right|^2 \le 4\left(\left|M_k\right|^2\left|\mathbf{z}_k^{'}(t)\right|^2+\left|\mathbf{h}_k^{'}(t)\right|^2+\left|T^{'}\left[t;\mathbf{z}_k(t)\right]\right|^2\right). \qquad (13)$$

Оценим $\left|T^{'}\left[t;\mathbf{z}_k(t)\right]\right|^2$, учитывая (10).

$$\begin{aligned}&\left|T^{'}\left[t;\mathbf{z}_k(t)\right]\right|^2 \le \mu_1\left(\left|\mathbf{z}_k(t)\right|^2+\int_0^t\left|\mathbf{z}_k(\tau)\right|^2d\tau+\int_0^t\left|\mathbf{z}_k^{'}(\tau)\right|^2d\tau\right)\le\\ &\le\mu_1\left(\eta_k e^{\theta t}+\eta_k\int_0^t e^{\theta\tau}d\tau+4\int_0^t\left[\left|M_k\right|^2\left|\mathbf{z}_k(\tau)\right|^2+\left|\mathbf{h}_k(\tau)\right|^2\frac{\mu\eta_k}{\theta}\left(e^{\theta\tau}-1\right)\right]d\tau\right)\le\\ &\le\mu_1(\eta_k e^{\theta t}+\frac{\eta_k}{\theta}\left(1+4\left|M_k\right|^2\right)\left(\left(e^{\theta t}-1\right)\right)+\\ &+4t\max_{0\le t\le t^{'}}\left|\mathbf{h}_k(\tau)\right|^2+4\frac{\mu\eta_k}{\theta}\left(\frac{e^{\theta t}-1}{\theta}-t\right)).\end{aligned} \qquad (14)$$

Из неравенств (13) и (14) следует, что $\mathbf{z}_k^{''}(t)$ обладает свойством (A). Аналогично доказываем, что свойством (A) обладают

$$\mathbf{z}_k^{'''}(t),...,\mathbf{z}_k^{(p+1)}(t).$$

Отсюда следует, что равномерно по $x,\ t$ сходятся в Π как ряды

$$\mathbf{i}(x,t)=\frac{\mathbf{i}_0(t)}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{i}_\mathbf{k}(t)\cos\frac{k\pi}{l}x,$$

$$\mathbf{u}(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{u}_\mathbf{k}(t)\sin\frac{k\pi}{l}x, \qquad (15)$$

так и ряды, полученные дифференцированием любое число раз этих рядов, если дифференцирование по t участвует не более $p+1$ раз. Из равномерной сходимости вытекает, что векторные функции $\mathbf{i}(x,t)$, $\mathbf{u}(x,t)$ имеют непрерывные производные любого порядка на прямоугольнике Π, если дифференцирование по t участвует не более $p+1$ раз.

Частичные суммы этих рядов

$$\mathbf{i}^{(n)}(x,t)=\frac{\mathbf{i}_0(t)}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{i}_\mathbf{k}(t)\cos\frac{k\pi}{l}x,$$

$$\mathbf{u}^{(n)}(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{u}_\mathbf{k}(t)\sin\frac{k\pi}{l}x, \qquad (16)$$

удовлетворяют в силу

$$L\mathbf{i}_\mathbf{k}'(t)+R\mathbf{i}_\mathbf{k}(t)+\frac{k\pi}{l}\mathbf{u}_k(t)+T_1[t;\mathbf{i}_\mathbf{k}(t)]=\mathbf{g}_{1,k}(t),$$

$$C\mathbf{u}_k'(t)-\frac{k\pi}{l}\bar{i}_k+G\mathbf{u}_k(t)+T_2[t;\mathbf{u}_k(t)]=\mathbf{g}_{2,k}(t)$$

$t\in[0,t']$

системе уравнений

$$L\frac{\partial\mathbf{i}^{(n)}}{\partial t}+\frac{\partial\mathbf{u}^{(n)}}{\partial x}+R\mathbf{i}^{(n)}+\bar{T}_1[x,t;\mathbf{i}^{(n)}]=\frac{\mathbf{g}_{1,0}(t)}{2}+\sum_{k=1}^{n}\mathbf{g}_{1,k}(t)\cos\frac{k\pi}{l}x,$$

$$C\frac{\partial\mathbf{u}^{(n)}}{\partial t}+\frac{\partial\mathbf{i}^{(n)}}{\partial x}+G\mathbf{u}^{(n)}+\bar{T}_2[x,t;\mathbf{u}^{(n)}]=\sum_{k=1}^{n}\mathbf{g}_{2,k}(t)\sin\frac{k\pi}{l}x,$$

Из (16) предельным переходом при $n\to\infty$ получаем, что векторы $\mathbf{i}(x,t)$ и $\mathbf{u}(x,t)$, определяемые формулами (15), образуют решение уравнений (1). Это решение удовлетворяет граничным условиям (2) и начальным условиям (3). Первое очевидно, а второе следует из того, что при $t=0$ ряды (15) переходят в ряды Фурье для функций $\mathbf{F}(x),\mathbf{\Phi}(x)$ и, в силу условий теоремы, сходятся к этим функциям. Теорема доказана.

Список литературы/ References

1. А.*Д. Мышкис* “Смешанные функционально-дифференциальные уравнения”, *Новые проблемы теории функционально-дифференциальных уравнений*, СМФН, 4, МАИ, М., 2003. С. 5–120; *Journal of Mathematical Sciences*, 129:5 (2005). С. 4111–4226
2. А.*Д. Мышкис* “Начальная задача для смешанных функционально-дифференциальных уравнений”, *Автомат. и телемех.*, 1999, №3. С. 170–179; *Autom. Remote Control*, 60:3 (1999). С. 436–444
3. *Дудко В.Г., Сумительнов В.Н., Шлопак А.А.,”* Решение одной смешанной задачи для системы телеграфных уравнений методом разделения переменных, Проблемы современной науки и образования 2017. № 33 (115). С. 27-33
4. *Шлопак А.А.* Решение смешанной задачи для линейных систем дифференциально-функциональных уравнений с постоянными коэффициентами при простейших граничных условиях, Проблемы современной науки и образования 2017. № 16 (98). С.26-30.
5. *Шлопак А.А.* О решении смешанной задачи линейных систем дифференциально-функциональных уравнений. Проблемы современной науки и образования 2021. № 11 (168). С. 34-41.