О РЕШЕНИИ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Шлопак А.А.

Шлопак Александр Анфирович - кандидат технических наук, доцент,
кафедра К1 систем автоматического управления,
Мытищинский филиал
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана (Национальный исследовательский университет), г. Мытищи

Аннотация: *исследования по решению смешанной задачи для системы дифференциально-функциональных уравнений изложены в [1], [2]. В работах [3], [5]-[8] для этих систем рассмотрены непрерывная зависимость решения от начальных условий и правых частей в смысле среднего квадратичного отклонения, доказаны теоремы о непрерывной зависимости частных производных по времени от решения. В данной статье рассматривается доказательство теоремы о существовании и единственности решения диффернциально-функционального уравнения одного типа. Доказательство теоремы и решение уравнения приводятся с использованием метода последовательных приближений Пикара. Для операторов типа Вольтерра предполагается наличие непрерывных частных производных по времени до соответствующего порядка.*

Ключевые слова: *уравнения, функциональный, теорема.*

ABOUT SOLVING THE MIXED PROBLEM OF LINEAR SYSTEMS OF DIFFERENTIAL-FUNCTIONAL EQUATIONS

Shlopak A.A.

Shlopak Alexander Anfirovich – PhD in Engineering Sciences, Associate Professor,
DEPARTMENT K1 AUTOMATIC CONTROL SYSTEMS,
MYTISHCHI BRANCH
MOSCOW STATE TECHNICAL UNIVERSITY N.E. BAUMAN (NATIONAL RESEARCH UNIVERSITY), MYTISHCHI

Abstract: *studies on solving a mixed problem for a system of differential-functional equations are described in [1], [2]. In works [3], [5]-[8] for these systems, the continuous dependence of the solution on initial conditions and right parts in the sense of mean quadratic deviation is considered, theorems on the continuous dependence of partial time derivatives on the solution are proved. In this article, the proof of the theorem about the existence and uniqueness of the solution of the differential-functional equation of one type is considered. The proof of the theorem and the solution of the equation are given using the Picard method of successive approximations. For operators of the Volterra type, it is assumed that there are continuous partial derivatives in time up to the corresponding order.*

Keywords: *equations, functional, theorem.*

УДК 681.51

Рассмотрим линейную систему дифференциально-функциональных уравнений

$$\begin{aligned} &L\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}+R\mathbf{i}+\overline{T}_1\left[x,y;\mathbf{i}\right]=\mathbf{g}_1, \\ &C\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial x}+J\mathbf{u}+\overline{T}_2\left[x,y;\mathbf{i}\right]=\mathbf{g}_2, \end{aligned} \tag{1}$$

$x\in[0,l],\ t\in\left[0,t^{'}\right],\ l\in[0,\infty],\ t^{'}\in[0,\infty].$

Здесь коэффициенты L,R,C и J -- постоянные квадратные матрицы порядка $m\geq 1.$ Кроме того, матрицы L и C - симметричны и положительно определены. Векторы $\mathbf{i}$ и $\mathbf{u}$ порядка m - искомые, их проекции зависят от аргументов x,t в прямоугольнике $\Pi:\ 0\leq x\leq l,\ 0\leq t\leq t^{'}.$

Правые части системы уравнений $\mathbf{g}_\nu$ $(\nu=1,2)$ имеют такую же структуру. $\overline{T}_1\left[x,y;\mathbf{i}\right]$ и $\overline{T}_2\left[x,y;\mathbf{u}\right]$- линейные векторные операторы типа Вольтерра порядка $m,$ определенные для непрерывных векторов $\mathbf{i}(x,t)$ и $\mathbf{u}(x,t)$ ($t\in\left[0,t^{'}\right]$ $x\in[0,l]$), удовлетворяющие условию (W) и (при некотором $p\geq 0$) условию $\left(\tilde{W}_p\right).$

Условие (W) состоит в том, что для любых двух пар непрерывных в Π векторных функций $\mathbf{i}_1,\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{i}_2,\mathbf{u}_2$ существует такое число $\mu \ge 0,$ что имеет место равенство

$$\left(T_\nu\left[x,t;\mathbf{i}_1,\mathbf{u}_1\right]-T_\nu\left[x,t;\mathbf{i}_2,\mathbf{u}_2\right]\right)^2 \le \mu\int\limits_0^t\left[\left(\mathbf{i}_1-\mathbf{i}_2\right)^2+\left(\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2\right)^2\right]d\tau \quad (\nu=1,2;\ x\in[0,l];\ t\in\left[0,t^{'}\right])$$

Условие $\left(\tilde{W}_p\right)$ состоит в том, что для непрерывных векторных функций $\mathbf{I}(t)$ и $\mathbf{U}(t)$ имеет место

$$\bar{T}_1\left[x,t;\mathbf{I}(t),X(x)\right]\equiv T_1\left[t;\mathbf{I}(t)\right]X(x),$$

$$\bar{T}_2\left[x,t;\mathbf{U}(t),\tilde{X}(x)\right]\equiv T_2\left[t;\mathbf{U}(t)\right]\tilde{X}(x)$$

($X(x)$ и $\tilde{X}(x)$ - любые скалярные непрерывные функции x), где $T_1\left[t;\mathbf{I}(t)\right]$ и $T_2\left[t;\mathbf{U}(t)\right]$ - операторы, удовлетворяющие условию $\left(W_p\right).$ Условие $\left(W_p\right)$ состоит в том, что если для некоторого целого $p\ge 1$ и некоторого целого $p^{'}\in[0,p],$ в Π существуют все непрерывные частные производные

$$\frac{\partial^k\mathbf{i}_s}{\partial t^k},\frac{\partial^k\mathbf{u}_s}{\partial t^k}\ \left(k=\overline{0,p^{'}}\right),\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^k\mathbf{i}_s}{\partial t^k}\right),\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^k\mathbf{u}_s}{\partial t^k}\right)\left(k=\overline{0,p^{'}-1}\right),\ (s=1,2)$$

то операторы $T_\nu\left[x,t;\mathbf{i},\mathbf{u}\right]$ $(\nu=1,2)$ имеют в Π непрерывные частные производные по t до $p^{'}$ -го порядка включительно, причем найдется такое постоянное число $\mu_p,$ что будет справедливо равенство

$$\left[\frac{\partial^{p^{'}}}{\partial t}\left(T_\nu\left[x,t;\mathbf{i}_1,\mathbf{u}_1\right]-T_\nu\left[x,t;\mathbf{i}_2,\mathbf{u}_2\right]\right)\right]^2\le\mu_p\{\sum_{k=0}^{p^{'}-1}(\left[\frac{\partial^k}{\partial t^k}\left(\mathbf{i}_1-\mathbf{i}_2\right)\right]^2+$$

$$+\left[\frac{\partial^k}{\partial t^k}\left(\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2\right)\right]^2)+\int\limits_0^t\sum_{k=0}^{p^{'}}\left[\left[\frac{\partial^k}{\partial\tau^k}\left(\mathbf{i}_1-\mathbf{i}_2\right)\right]^2+\left[\frac{\partial^k}{\partial\tau^k}\left(\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2\right)\right]^2\right]d\tau\}$$

$$(t\in\left[0,t^{'}\right],\ x\in[0,l],\ \nu=1,2)$$

Отметим, что при $p=0$ условие $\left(W_p\right)$ превращается в условие $(W).$

Систему уравнений (1) будем рассматривать при граничных условиях

$$\mathbf{u}|_{x=0}=\mathbf{u}|_{x=l}=0\quad\left(t\in\left[0,t^{'}\right]\right)\qquad(2)$$ и начальных условиях

$$\mathbf{i}|_{t=0}=\mathbf{F}(x),\quad\mathbf{u}|_{t=0}=\mathbf{\Phi}(x)\quad\left(x\in[0,l]\right)\qquad(3)$$

Рассмотрим формальный метод решения системы уравнений (1) при граничных условиях (2) и начальных (3) следуя [4]. В соответствии с граничными условиями (2) решение ищем в виде

$$\mathbf{i}(x,t)=\frac{\mathbf{i}_0(t)}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{i}_k(t)\cos\frac{k\pi}{l}x,$$
$$\mathbf{u}(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{u}_k(t)\sin\frac{k\pi}{l}x.\qquad(4)$$

При этом граничные условия (2) автоматически удовлетворяются. Подставляя векторы (4) в систему уравнений (1) и используя условие $\left(\tilde{W}\right),$ получим

$$L\mathbf{i}_k^{'}(t)+R\mathbf{i}_k(t)+\frac{k\pi}{l}\mathbf{u}_k(t)+T_1\left[t;\mathbf{i}_k(t)\right]=\mathbf{g}_{1k}(t),$$

$$C\mathbf{u}_k^{'}(t)-\frac{k\pi}{l}\mathbf{i}_k(t)+J\mathbf{u}_k(t)+T_2\left[t;\mathbf{u}_k(t)\right]=\mathbf{g}_{2k}(t),\qquad(5)$$

$$t\in[0,t],$$

где: $k = 0,1,2,\ldots$ $\left(\mathbf{u}_0(t) \equiv 0\right)$, а

$$\mathbf{g}_{1k}(t) = \frac{2}{l}\int_0^l \mathbf{g}_1(x,t)\cos\frac{k\pi}{l}xdx,$$
$$\mathbf{g}_{2k}(t) = \frac{2}{l}\int_0^l \mathbf{g}_2(x,t)\sin\frac{k\pi}{l}xdx, \qquad (6)$$

Значения $\mathbf{i}_k(0)$ и $\mathbf{u}_k(0)$ получим из начальных условий (3)

$$\mathbf{i}_k(0) = \mathbf{i}_{k0} = \frac{2}{l}\int_0^l \mathbf{F}(x)\cos\frac{k\pi}{l}xdx,$$
$$u_k(0) = u_{k0} = \frac{2}{l}\int_0^l \mathbf{\Phi}(x)\sin\frac{k\pi}{l}xdx. \qquad (7)$$

Составим теперь $2m$ - мерные векторы $\mathbf{z}_k(t), \mathbf{z}_{k0}, \mathbf{h}_k(t)$ и $T[t;\mathbf{z}_k]$:

$$\mathbf{z}_k(t) = \left\{\mathbf{i}_k(t), \mathbf{u}_k(t)\right\}, \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_{k0} = \left\{\mathbf{i}_{k0}, \mathbf{u}_{k0}\right\},$$
$$\mathbf{h}_k(t) = \left\{L^{-1}\mathbf{g}_{1k}(t), C^{-1}\mathbf{g}_{2k}(t)\right\}, \qquad (8)$$
$$T[t;\mathbf{z}_k] = \left\{L^{-1}T_1[t;\mathbf{i}_k], C^{-1}T_2[t,\mathbf{u}_k]\right\}.$$

Тогда систему уравнений (5) можно переписать в виде:

$$\mathbf{z}_k^{'}(t) + M_k\mathbf{z}_k(t) + T\left[t;\mathbf{z}_k(t)\right] = \mathbf{h}_k(t), \qquad (9)$$

где M_k - матрица $2m$ - го порядка

$$M = \begin{pmatrix} L^{-1} & \frac{k\pi}{l}L^{-1} \\ -\frac{k\pi}{l}C^{-1} & C^{-1}J \end{pmatrix}. \qquad (10)$$

Дифференциально-функциональное уравнение (9) с начальным условием $\mathbf{z}_k(0) = \mathbf{z}_{k0}$ эквивалентно уравнению

$$\mathbf{z}_k(t) = \mathbf{z}_{k0} + \int_0^t \left\{\mathbf{h}_k(\tau) - M_k\mathbf{z}_k(\tau) - T[\tau;\mathbf{z}_k]\right\}d\tau. \qquad (11)$$

Решение уравнения (11) находим методом последовательных приближений Пикара. В качестве нулевого приближения берем $\mathbf{z}_{ko}$. Остальные приближения вычисляются последовательно по формулам:

$$\mathbf{z}_{k,n}(t) = \mathbf{z}_{k,0} + \int_0^t \left\{\mathbf{h}_k(\tau) - M_k\mathbf{z}_{k,n-1}(\tau) - T\left[\tau;\mathbf{z}_{k,n-1}\right]\right\}d\tau \quad (n = 1,2,\ldots). \qquad (12)$$

Предельная функция $\mathbf{z}_k(t)$ последовательности $\mathbf{z}_{k,n}(t)$

$$\mathbf{z}_k(t) = \lim_{n\to\infty}\mathbf{z}_{k,n}(t) \qquad (13)$$

удовлетворяет уравнению (11) и, следовательно, удовлетворяет уравнению (9) и начальному условию $\mathbf{z}_k(0) = \mathbf{z}_{k0}$. Итак, формулы (4), (8), (13), (12), (7), (6)и (10) совместно дают решение рассматриваемой задачи. Докажем теорему, утверждающую существование и единственность решения уравнения (11).

<u>Теорема.</u> Пусть оператор $T[t;\mathbf{z}]$ удовлетворяет условию (W), а функция $\mathbf{h}_k(t)$ непрерывна при $t \in \left[0,t^{'}\right]$. Тогда на отрезке $\left[0,t^{'}\right]$ существует и притом единственное решение уравнения (11).

Доказательство. Доказательство существования решения будем проводить методом последовательных приближений Пикара. В качестве нулевого приближения берем $\mathbf{z}_{k0}$, а остальные приближения вычисляем по формулам (12). Тогда будем иметь:

$$\left|\mathbf{z}_{k,1}-\mathbf{z}_{k0}\right| \le \int_0^t \left[\left|\mathbf{h}_k(\tau)\right| + \left|M_k\right|\left|\mathbf{z}_{k0}\right| + \left|T[\tau;\mathbf{z}_{k0}]\right|\right] d\tau \qquad \left(0 \le \tau \le t \le t'\right),$$

или, применяя неравенство Коши-Буняковского

$$\left|\mathbf{z}_{k,1}-\mathbf{z}_{k0}\right| \le 2t^{\frac{1}{2}} \left\{\int_0^t \left[\left|\mathbf{h}_k(\tau)\right|^2 + \left|M_k\right|^2\left|\mathbf{z}_{k0}\right|^2 + \left|T[\tau;\mathbf{z}_{k0}]\right|^2\right] d\tau\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Далее, применяя условие (W), получим:

$$\left|\mathbf{z}_{k,1}-\mathbf{z}_{k0}\right| \le 2t^{\frac{1}{2}} \left\{\int_0^t \left[\left|\mathbf{h}_k(\tau)\right|^2 + \left|M_k\right|^2\left|\mathbf{z}_{k0}\right|^2 + \mu\tau\left|\mathbf{z}_{k0}\right|^2\right] d\tau\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Откуда

$$\left|\mathbf{z}_{k,1}-\mathbf{z}_{k0}\right| \le 2\sqrt{t'} \left\{\int_0^t \left[\left|\mathbf{h}_k(\tau)\right|^2 + \left|M_k\right|^2\left|\mathbf{z}_{k0}\right|^2 + \mu t'\left|\mathbf{z}_{k0}\right|^2\right] d\tau\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Теперь, пользуясь неравенствами

$$t'\left|\mathbf{h}_k(t)\right|^2 \le k_k^2,\ t'\left|M_k\right|^2 \le k_k^2,\ \mu t' \le k_k^2,\ \left|\mathbf{z}_{k0}\right|^2 \le N_k,$$

где $k_k^2 = \max\left\{t' \max\limits_{t\in[0,t']}\left|\mathbf{h}_k(t)^2\right|, t'\left|M_k\right|^2, \mu t'^2\right\} > 0$ и $N_k > 0$ - некоторые числа, зависящие от k, окончательно получим

$$\left|\mathbf{z}_{k,1}-\mathbf{z}_{k0}\right| \le 2k_k\left(1+2N_k\right)^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}}.$$

Далее, из неравенства

$$\left|\mathbf{z}_{k,n+1}(t)-\mathbf{z}_{k,n}(t)\right| = \left|\int_0^t \left[M_k\left(\mathbf{z}_{k,n}(\tau)-\mathbf{z}_{k,n-1}(\tau)\right) + \left(T[\tau;\mathbf{z}_{k,n}] - T[\tau;\mathbf{z}_{k,n-1}]\right)\right] d\tau\right| \le$$

$$\le \sqrt{t}\sqrt{2}\left\{\int_0^t \left[\left|M_k\left(\mathbf{z}_{k,n}(\tau)-\mathbf{z}_{k,n-1}(\tau)\right)\right|^2 + \left|T[\tau;\mathbf{z}_{k,n}] - T[\tau;\mathbf{z}_{k,n-1}]\right|^2\right] d\tau\right\}^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \sqrt{2}\sqrt{t'}\left\{\int_0^t \left[\left|M_k\right|^2\left|\mathbf{z}_{k,n}(\tau)-\mathbf{z}_{k,n-1}(\tau)\right|^2 + \mu\int_0^\tau \left|\mathbf{z}_{k,n}(\sigma)-\mathbf{z}_{k,n-1}(\sigma)\right|^2 d\sigma\right] d\tau\right\}^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \sqrt{2}\sqrt{t'}\left\{\int_0^t \left[\left|M_k\right|^2 + \mu t\right]\left|\mathbf{z}_{k,n}(\tau)-\mathbf{z}_{k,n-1}(\tau)\right|^2 d\tau\right\}^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le 2k_k\left\{\int_0^t \left|\mathbf{z}_{k,n}(\tau)-\mathbf{z}_{k,n-1}(\tau)\right|^2 d\tau\right\}^{\frac{1}{2}}$$

получим:

$$\left|\mathbf{z}_{k,2}-\mathbf{z}_{k,1}\right|\le\left(2k_k\right)^2\left(1+2N_k\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{t^2}{2!}\right)^{\frac{1}{2}},$$

....

$$\left|\mathbf{z}_{k,n}-\mathbf{z}_{k,n-1}\right|\le\left(2k_k\right)^n\left(1+2N_k\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{t^n}{n!}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда следует, что все члены ряда

$$\mathbf{z}_{k0}+\left(\mathbf{z}_{k,1}-\mathbf{z}_{k,0}\right)+\ldots+\left(\mathbf{z}_{k,n}-\mathbf{z}_{k,n-1}\right)+\ldots\quad, \tag{14}$$

начиная со второго, по модулю меньше, чем члены сходящегося ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(2k_k\right)^n\left(1+2N_k\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{t'^n}{n!}\right)^{\frac{1}{2}}$$

с постоянными положительными членами, а потому ряд (14) сходится равномерно на отрезке $\left[0,t'\right]$. Из равномерной сходимости ряда следует равномерная сходимость последовательности $\mathbf{z}_{k,n}\left(t\right)\quad\left(n=1,2,\ldots\right)$.

Предельная функция $\mathbf{z}_k\left(t\right)$ последовательности $\mathbf{z}_{k,n}\left(t\right)$ удовлетворяет уравнению (11). Действительно, так как

$$\left|\int_0^t\left[-M_k\left(\mathbf{z}_{k,n-1}\left(\tau\right)-\mathbf{z}_k\left(\tau\right)\right)-\left(T\left[\tau;\mathbf{z}_{k,n-1}\right]-T\left[\tau;\mathbf{z}_k\right]\right)\right]d\tau\right|\le$$

$$\le\left|M_k\right|\int_0^t\left|\mathbf{z}_{k,n-1}\left(\tau\right)-\mathbf{z}_k\left(\tau\right)\right|d\tau+t'\sqrt{\mu}\left[\int_0^t\left|\mathbf{z}_{k,n-1}\left(\tau\right)-\mathbf{z}_k\left(\tau\right)\right|^2d\tau\right]^{\frac{1}{2}},$$

то в формуле (12) можно переходить к пределу при $n\to\infty$ в обоих частях равенства, а поэтому предельная функция $\mathbf{z}_k\left(t\right)$ удовлетворяет уравнению (11). Таким образом, доказано существование непрерывного решения уравнения (11).

Теперь докажем единственность уравнения (11) на отрезке $\left[0,\bar{t}\right]$, где $\bar{t}$ определяется из неравенства

$$2\bar{t}^{\,2}\left(\left|M_k\right|^2+\mu\bar{t}\right)<1. \tag{15}$$

Пусть будут два решения $\mathbf{z}_k\left(t\right)$ и $\mathbf{Z}_k\left(t\right)$ уравнения (11). Тогда, подставляя в уравнение (11) одно, а потом другое решение и вычитая почленно, будем иметь:

$$\mathbf{z}_k\left(t\right)-\mathbf{Z}_k\left(t\right)=-\int_0^t\left[M_k\left(\mathbf{z}_k\left(\tau\right)-\mathbf{Z}_k\left(\tau\right)\right)+\left(T\left[\tau;\mathbf{z}_k\right]-T\left[\tau;\mathbf{Z}_k\right]\right)\right]d\tau.$$

Отсюда

$$\left|\mathbf{z}_k\left(t\right)-\mathbf{Z}_k\left(t\right)\right|\le\int_0^t\left[\left|M_k\right|\left|\mathbf{z}_k\left(\tau\right)-\mathbf{Z}_k\left(\tau\right)\right|+\left|T\left[\tau;\mathbf{z}_k\right]-T\left[\tau;\mathbf{Z}_k\right]\right|\right]d\tau,$$

или, применяя неравенство Коши-Буняковского и условие $\left(W\right)$, получим:

$$\left|\mathbf{z}_k\left(t\right)-\mathbf{Z}_k\left(t\right)\right|\le\left(2t\right)^{\frac{1}{2}}\left\{\int_0^t\left[\left|M_k\right|^2\left|\mathbf{z}_k\left(\tau\right)-\mathbf{Z}_k\left(\tau\right)\right|^2+\mu\int_0^{\tau}\left|\mathbf{z}_k\left(\sigma\right)-\mathbf{Z}_k\left(\sigma\right)\right|^2d\sigma\right]d\tau\right\}^{\frac{1}{2}},$$

откуда при $t\in\left[0,\bar{t}\right]$

$$\left|\mathbf{z}_k(t)-\mathbf{Z}_k(t)\right| \le \left[2\bar{t}\left(\left|M_k\right|^2+\mu t\right)\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_0^t\left|\mathbf{z}_k(\tau)-\mathbf{Z}_k(\tau)\right|^2 d\tau\right]^{\frac{1}{2}}. \qquad (16)$$

Обозначим $\max_{t\in[0,\bar{t}]}\left|\mathbf{z}_k(t)-\mathbf{Z}_k(t)\right|$ через δ и пусть этот максимум достигается при $t=\xi$ $\left(\xi\in\left[0,\bar{t}\right]\right)$. Тогда имеем при $t=\xi$

$$\left|\mathbf{z}_k(\xi)-\mathbf{Z}_k(\xi)\right|=\delta.$$

Неравенство (16) при $t=\xi$ примет вид

$$\delta \le \delta\bar{t}\left[2\left(\left|M_k\right|^2+\mu\bar{t}\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда, в силу неравенства (15) и следует, что $\delta=0,$ т.е. вытекает единственность решения уравнения (11) на отрезке $\left[0,\bar{t}\right]$. Покрывая отрезок $\left[0,t'\right]$ несколькими отрезками длины $\bar{t}>0,$ мы докажем совпадение $\mathbf{z}_k(t)$ и $\mathbf{Z}_k(t)$ на всем отрезке $\left[0,t'\right]$. Итак, единственность решения уравнения (11) доказана и, следовательно, полностью доказана теорема.

Список литературы / References

1. *Мышкис А.Д.* “Смешанные функционально-дифференциальные уравнения”, Новые проблемы теории функционально-дифференциальных уравнений, СМФН. **4**, МАИ, М., 2003. 5–120; Journal of Mathematical Sciences, **129**:5 (2005), 4111–4226.
2. *Мышкис А.Д.* “Начальная задача для смешанных функционально-дифференциальных уравнений”, Автомат. и телемех., 1999. № 3. 170–179; Autom. Remote Control, **60**:3 (1999). 436–444.
3. *Дудко В.Г.,* Сумительнов В.Н., Шлопак А.А. ”Решение одной смешанной задачи для системы телеграфных уравнений методом разделения переменных. Проблемы современной науки и образования, 2017. № 33 (115). 27-33.
4. *Шлопак А.А.* Решение смешанной задачи для линейных систем дифференциально-функциональных уравнений с постоянными коэффициентами при простейших граничных условиях, Проблемы современной науки и образования,2017. № 16 (98). 26-30.
5. *Есаков В.А., Дудко В.Г., Шлопак А.А.* Об одном методе доказательства основного тождества, необходимого для определения непрерывной зависимости решения дифференциально-функциональных уравнений от начальных условий и правых частей системы в смысле среднего квадратичного отклонения. Проблемы современной науки и образования, 2018. № 12 (132). 51-56.
6. *Есаков В.А., Дудко В.Г., Шлопак А.А.* Непрерывная зависимость решения дифференциально-функциональных уравнений от начальных условий и правых частей системы в смысле среднего квадратичного отклонения. Проблемы современной науки и образования, 2019. № 12 (145).
7. *Дудко В.Г., Шлопак А.А.* О непрерывной зависимости частных производных от решения дифференциально-функциональных уравнений от начальных условий и правых частей системы в смысле среднего квадратичного отклонения. Проблемы современной науки и образования, 2019. № 12 (145).
8. *Дудко В.Г., Шлопак А.А.* О непрерывной зависимости решения смешанной задачи для систем дифференциально-функциональных уравнений от коэффициентов системы в смысле среднего квадратичного отклонения. Проблемы современной науки и образования, 2020. № 12 (157). Часть 2.