О НЕПРЕРЫВНОЙ ЗАВИСИМОСТИ РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ОТ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ

Шлопак А.А.

Шлопак Александр Анфирович - кандидат технических наук, доцент,
кафедра К1 систем автоматического управления,
Мытищинский филиал
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана (Национальный исследовательский университет), г. Мытищи

Аннотация: *решение смешанной задачи для системы дифференциально-функциональных уравнений подробно рассмотрено в [1], [2]. В работах [3]-[8] для этих систем рассмотрены непрерывная зависимость решения от начальных условий и правых частей в смысле среднего квадратичного отклонения, доказаны теоремы о непрерывной зависимости частных производных по времени от решения. В данной статье рассматривается непрерывная зависимость решения смешанной задачи для систем линейных интегро-дифференциальных уравнений от начальных условий, правых частей и коэффициентов системы. Доказывается, что все теоремы о непрерывной зависимости решения смешанной задачи для систем дифференциально-функциональных уравнений из [3]-[8] справедливы и для решения смешанной задачи для линейной системы интегро-дифференциальных уравнений.*

Ключевые слова: *уравнения, функциональный, теорема.*

ON THE CONTINUOUS DEPENDENCE OF THE SOLUTION OF THE MIXED PROBLEM FOR SYSTEMS OF LINEAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS ON INITIAL CONDITIONS

Shlopak A.A.

Shlopak Alexander Anfirovich – PhD in Engineering Sciences, Associate Professor,
DEPARTMENT K1 AUTOMATIC CONTROL SYSTEMS,
MYTISHCHI BRANCH
MOSCOW STATE TECHNICAL UNIVERSITY N.E. BAUMAN (NATIONAL RESEARCH UNIVERSITY), MYTISHCHI

Abstract: *the solution of the mixed problem for the system of differential-functional equations is discussed in detail in [1], [2]. In works [3] - [9] for these systems, the continuous dependence of the solution on the initial conditions and right parts in the sense of the mean quadratic deviation is considered, theorems on the continuous dependence of partial time derivatives on the solution are proved. This article discusses the continuous dependence of the solution of the mixed problem for systems of linear integro-differential equations on the initial conditions, right parts and coefficients of the system. It is proved that all theorems on the continuous dependence of solving a mixed problem for systems of differential-functional equations from [3] - [9] are valid for solving a mixed problem for a linear system of integro-differential equations.*

Keywords: *equations, functional, theorem.*

УДК 681.51

Рассмотрим линейную систему интегро-дифференциальных уравнений

$$L_\nu\left[\mathbf{i},\mathbf{u}\right]+\int_0^t\left[J_\nu\mathbf{i}\left(x,\tau\right)+H_\nu\mathbf{u}\left(x,\tau\right)\right]d\tau=\mathbf{g}_\nu,\quad \nu=1,2 \qquad (1)$$

при граничных условиях из [9]:

$$\left[(C_1-P_1)\mathbf{u}+Q_1\mathbf{i}+R_1\frac{\partial\mathbf{i}}{\partial t}+S_1\int_0^t\mathbf{i}dt\right]|_{x=0}=0,\quad P_1^T\mathbf{i}\,|_{x=0}=0 \qquad (2)$$

$$\left[(C_1-P_2)\mathbf{u}-Q_2\mathbf{i}-R_2\frac{\partial\mathbf{i}}{\partial t}-S_2\int_0^t\mathbf{i}dt\right]|_{x=l}=0,\quad P_2^T\mathbf{i}\,|_{x=l}=0$$

Здесь $L_\nu\left[\mathbf{i},\mathbf{u}\right]$ являются линейными дифференциальными выражениями

$$L_1[\mathbf{i},\mathbf{u}] = A_1\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t} + B_1\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial x} + C_1\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + D_1\mathbf{i} + F_1\mathbf{u},$$

$$L_2[\mathbf{i},\mathbf{u}] = A_2\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t} + B_2\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial x} + C_2\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + D_2\mathbf{i} + F_2\mathbf{u},$$

где: коэффициенты $A_1, B_1, ..., F_2$ - квадратные матрицы порядка m с элементами, зависящими от x,t. Векторы $\mathbf{i},\mathbf{u}$ порядка m являются искомыми; их компоненты зависят от x,t. Правые части системы уравнений $\mathbf{g}_\nu$ известны и имеют такую же структуру.

J_ν и H_ν - квадратные матрицы того же порядка m, определенные и непрерывные по совокупности аргументов x,t,τ при $x\in[0,l]$, $t\in[0,t']$, $\tau\in[0,t]$.

Интегралы $V_\nu[x,t;\mathbf{i},\mathbf{u}] = \int_0^t [J_\nu\mathbf{i} + H_\nu\mathbf{u}]d\tau \quad (\nu = 1,2)$ являются линейными операторами, определенными для значений x,t при $x\in[0,l]$, $t\in[0,t']$ для всех непрерывных векторных функций $\mathbf{i}$ и $\mathbf{u}$, причем значения интегралов при любых x,t зависят только от значений m - мерных векторных функций $\mathbf{i}(x,\tau)$, $\mathbf{u}(x,\tau)$, соответствующих значениям $\tau:\tau\in[0,t]$. Отсюда следует, что они представляют собой частный случай операторов типа Вольтерра. Покажем, что условие (W) из [9] также выполнено. Для этого понадобится следующая

<u>Лемма</u>. Если $\boldsymbol{\alpha}(x,t)$ m - мерный вектор $(m\ge 1)$, проекции которого являются непрерывными функциями по совокупности x,t при $x\in[0,l]$, $t\in[0,t']$, а $A(x,t,\tau)$ - квадратная матрица m- го порядка, непрерывная по совокупности x,t,τ при $x\in[0,l]$, $t\in[0,t']$, $\tau\in[0,t]$, то справедливо равенство

$$\left(\int_0^t A(x,t,\tau)\boldsymbol{\alpha}(x,\tau)d\tau\right)^2 \le t|A|^2\int_0^t \boldsymbol{\alpha}^2(x,\tau)d\tau,$$

$$x\in[0,l],\ t\in[0,t'],$$

где $|A|^2 \le \max_Q \sum_{k,n=1}^m a_{kn}{}^2(x,t)$. Если элементы матрицы A являются непрерывными на некотором компактном множестве Q функциями, то под $|A|$ будем понимать максимум на Q корня квадратного из наибольшего собственного значения матрицы $A^T A$.

Доказательство. Так как $|A\boldsymbol{\alpha}| \le |A||\boldsymbol{\alpha}|$, то применяя неравенство Коши-Буняковского, получим:

$$\left(\int_0^t A\boldsymbol{\alpha}d\tau\right)^2 \le \left(\int_0^t |A\boldsymbol{\alpha}|d\tau\right)^2 \le \left(\int_0^t 1\cdot|A\boldsymbol{\alpha}|d\tau\right)^2 \le t\int_0^t (A\boldsymbol{\alpha})^2 d\tau \le t|A|^2\int_0^t \boldsymbol{\alpha}^2 d\tau.$$

Лемма доказана.

В силу доказанной леммы будем иметь:

$$\left[\int_0^t [J_\nu\mathbf{i} + H_\nu\mathbf{u}]d\tau\right]^2 \le 2\left[\left(\int_0^t J_\nu\mathbf{i}d\tau\right)^2 + \left(\int_0^t H_\nu\mathbf{u}d\tau\right)^2\right] \le$$

$$\le 2\left[t|J_\nu|^2\int_0^t \mathbf{i}^2 d\tau + t|H_\nu|^2\int_0^t \mathbf{u}^2 d\tau\right] \le \mu\left[\int_0^t (\mathbf{i}^2 + \mathbf{u}^2)\right],$$

где $\mu = 2t'\max\left[|J_\nu|^2, |H_\nu|^2\right]$.

Это неравенство, в силу линейности операторов $V_\nu\left[x,t;\mathbf{i},\mathbf{u}\right]$ и показывает, что операторы $V_\nu\left[x,t;\mathbf{i},\mathbf{u}\right]$ удовлетворяют условию (W).

Если дополнительно при некотором $p\geq 1$ существуют все непрерывные производные

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k}J_\nu(x,t,\tau),\ \frac{\partial^k}{\partial t^k}H_\nu(x,t,\tau),\ \frac{\partial^{k-1}}{\partial t^{k-1}}J_\nu(x,t,\tau) \text{ и } \frac{\partial^{k-1}}{\partial t^{k-1}}H_\nu(x,t,\tau)\quad \left(k=\overline{1,p}\right)$$

при $x\in[0,l],\ t\in\left[0,t^{'}\right],\ \tau\in[0,t],$ то операторы $V_\nu\left[x,t;\mathbf{i},\mathbf{u}\right]$ удовлетворяют условию $\left(W_p\right)\ \ (p\geq 1)$.

Действительно, при сделанных предположениях и при выполнении предпосылок условия $\left(W_p\right)$ будем иметь $\left(0\leq p^{'}\leq p\right)$:

$$\left\{\frac{\partial^{p^{'}}}{\partial t^{p^{'}}}V_\nu\left[x,t;\mathbf{i},\mathbf{u}\right]\right\}^2=\{\frac{\partial^{p^{'}-1}}{\partial t^{p^{'}-1}}\left(J_\nu\mathbf{i}+H_\nu\mathbf{u}\right)+\frac{\partial^{p^{'}-2}}{\partial t^{p^{'}-2}}\left(J_\nu\mathbf{i}+H_\nu\mathbf{u}\right)+$$

$$+\ldots+\frac{\partial^{p^{'}-1}J_\nu}{\partial t^{p^{'}-1}}\mathbf{i}+\frac{\partial^{p^{'}-1}H_\nu}{\partial t^{p^{'}-1}}\mathbf{u}+\int_0^t\left(\frac{\partial^{p^{'}}J_\nu}{\partial t^{p^{'}}}\mathbf{i}+\frac{\partial^{p^{'}}H_\nu}{\partial t^{p^{'}}}\mathbf{u}\right)d\tau\}^2.$$

Теперь производим дифференцирование по формуле Лейбница, оцениваем квадрат суммы суммой квадратов, применяем доказанную лемму и коэффициенты оцениваем максимумом модуля. Этим и доказывается, что операторы $V_\nu\left[x,t;\mathbf{i},\mathbf{u}\right]$ удовлетворяют условию $\left(W_p\right)$.

Аналогично доказываем, что операторы $V_\nu\left[x,t;\mathbf{i},\mathbf{u}\right]$ удовлетворяют условию $\left(W_{p,q}\right)\ \left(p\geq 0,q\geq 0\right),$ если существуют все непрерывные, не зависящие от порядка дифференцирования, производные

$$\frac{\partial^{k+r}}{\partial t^k\partial x^r}J_\nu(x,t,\tau),\ \frac{\partial^{k+r}}{\partial t^k\partial x^r}H_\nu(x,t,\tau),\ \frac{\partial^{k+r-1}}{\partial t^{k-1}\partial x^r}J_\nu(x,t,\tau) \text{ и } \frac{\partial^{k+r-1}}{\partial t^{k-1}\partial x^r}H_\nu(x,t,\tau)$$

$$(k+r\leq p+q,\ \ r\leq q),$$

при $x\in[0,l],\ t\in\left[0,t^{'}\right],\ \tau\in[0,t].$

Итак, операторы $V_\nu\left[x,t;\mathbf{i},\mathbf{u}\right]$ являются частным случаем операторов типа Вольтерра и удовлетворяют, при известных предположениях о гладкости функций J_ν и $H_\nu,$ условиям $(W),\left(W_p\right)$ и $\left(W_{pq}\right)$. Отсюда следует, что все теоремы о непрерывной зависимости решения смешанной задачи для системы дифференциально-функциональных уравнений из [5] справедливы, в частности, для решения смешанной задачи для линейной системы интегро-дифференциальных уравнений (1) при граничных условиях (2).

Замечание 1. Рассмотрим систему интегро-дифференциальных уравнений

$$L_\nu\left[\mathbf{i},\mathbf{u}\right]+\int_0^t\left(J_\nu\mathbf{i}+H_\nu\mathbf{u}+M_\nu\frac{\partial\mathbf{i}}{\partial\tau}+N_\nu\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\tau}\right)d\tau=\mathbf{g}_\nu,\quad \nu=1,2 \qquad (3)$$

Здесь $L_\nu\left[\mathbf{i},\mathbf{u}\right],J_\nu,H_\nu,\mathbf{g}_\nu,\mathbf{i},\mathbf{u}$ означают то же самое, что и в системе (1). M_ν,N_ν - квадратные матрицы, имеющие такую же структуру, какую имеют матрицы J_ν и H_ν.

Если матрицы M_ν и N_ν непрерывно дифференцируемы по τ при $x\in[0,l],t\in\left[0,t^{'}\right],\tau\in[0,t],$ то система уравнений (3) путем интегрирования по частям сводится к системе уравнений вида (1), но с дополнительными слагаемыми, содержащими $\mathbf{i}(x,0)$ и $\mathbf{u}(x,0)$. Эти дополнительные слагаемые при проведении оценок надо объединять с известными функциями $\mathbf{g}_\nu,$ а коэффициенты надо оценивать максимумом модуля, а сами члены объединять с другими членами, содержащими значения искомых функций при $t=0$. В результате вид окончательных оценок не изменится.

Замечание 2. Рассмотрим линейную систему интегро-дифференциальных уравнений

$$L_\nu\left[\mathbf{i},\mathbf{u}\right]+\int_0^t\left(J_\nu\mathbf{i}+H_\nu\mathbf{u}+M_\nu\frac{\partial\mathbf{i}}{\partial\tau}+N_\nu\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\tau}+\Phi_\nu\frac{\partial\mathbf{i}}{\partial x}+\Psi_\nu\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x}\right)d\tau=\mathbf{g}_\nu,\ \ \nu=1,2 \qquad (4)$$

Здесь $L_\nu\left[\mathbf{i},\mathbf{u}\right],J_\nu,H_\nu,M_\nu,N_\nu,\mathbf{g}_\nu,\mathbf{i},\mathbf{u}$ означают то же самое, что и в системе (3). Φ_ν,Ψ_ν - квадратные матрицы того же порядка m, зависящие от $x,t,\tau.$ Они определены и непрерывны по совокупности аргументов при $x\in\left[0,l\right],t\in\left[0,t^{'}\right],\tau\in\left[0,t\right].$ Пусть определители матриц C_1 и $B_2C_1^{-1}B_1-C_1^T$ отличны от нуля. Покажем, что система уравнений (4) сводится к системе уравнений вида (3). Действительно, умножим первое уравнение системы (4) слева на $B_2C_1^{-1}$ и вычтем из полученного равенства второе уравнение системы (4). Получим:

$$\begin{aligned}&\left(B_2C_1^{-1}B_1-C_1^T\right)\frac{\partial\mathbf{i}}{\partial x}=-B_2C_1^{-1}A_1\frac{\partial\mathbf{i}}{\partial t}+A_2\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}-\left(B_2C_1^{-1}D_1-F_2\right)\mathbf{i}-\\&-\left(B_2C_1^{-1}F_1-D_2\right)\mathbf{u}+B_2C_1^{-1}\mathbf{g}_1-\mathbf{g}_2-\int_0^t[\left(B_2C_1^{-1}J_1-J_2\right)\mathbf{i}+\left(B_2C_1^{-1}H_1-H_2\right)\mathbf{u}+\\&+\left(B_2C_1^{-1}M_1-M_2\right)\frac{\partial\mathbf{i}}{\partial\tau}+\left(B_2C_1^{-1}N_1-N_2\right)\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\tau}]d\tau-\\&-\int_0^t[\left(B_2C_1^{-1}\Phi_1-\Phi_2\right)\frac{\partial\mathbf{i}}{\partial x}+\left(B_2C_1^{-1}\Psi_1-\Psi_2\right)\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x}]d\tau,\end{aligned} \qquad (5)$$

$$\begin{aligned}&\left(C_1-B_1C_2^{-1}B_2\right)\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x}=-A_1\frac{\partial\mathbf{i}}{\partial t}+B_1C_2^{-1}A_2\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}-\left(D_2-B_1C_2^{-1}F_2\right)\mathbf{i}-\\&-\left(F_1-B_1C_2^{-1}D_2\right)\mathbf{u}+\mathbf{g}_1-B_1C_2^{-1}\mathbf{g}_2-\int_0^t[\left(J_1-B_1C_2^{-1}J_2\right)\mathbf{i}+\left(H_1-B_1C_2^{-1}H_2\right)\mathbf{u}+\\&+\left(M_1-B_1C_2^{-1}M_2\right)\frac{\partial\mathbf{i}}{\partial\tau}+\left(N_1-B_1C_2^{-1}N_2\right)\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\tau}]d\tau-\\&-\int_0^t[\left(\Phi_1-B_1C_2^{-1}\Phi_2\right)\frac{\partial\mathbf{i}}{\partial x}+\left(\Psi_1-B_1C_2^{-1}\Psi_2\right)\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x}]d\tau,\end{aligned} \qquad (6)$$

Так как определители матриц C_1 и $B_2C_1^{-1}B_1-C_1^T$ отличны от нуля и справедливо соотношение $B_1C_2^{-1}B_1-C_1=\left(B_2C_1^{-1}B_1-C_1^T\right)^T$, то, выражая из (5) и (6) $\frac{\partial\mathbf{i}}{\partial x}$ и $\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x}$, получим систему интегральных уравнений Вольтерра 2-го рода (относительно $\frac{\partial\mathbf{i}}{\partial x}$ и $\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x}$)

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\mathbf{i}}{\partial x}=\mathbf{f}_1+\int_0^t\left(K_{11}\frac{\partial\mathbf{i}}{\partial x}+K_{12}\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x}\right)d\tau,\\&\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x}=\mathbf{f}_2+\int_0^t\left(K_{21}\frac{\partial\mathbf{i}}{\partial x}+K_{22}\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x}\right)d\tau,\end{aligned} \qquad (7)$$

где:

$$\mathbf{f}_1=\left(B_2C_1^{-1}B_1-C_1^T\right)^{-1}\{-B_2C_1^{-1}A_1\frac{\partial\mathbf{i}}{\partial t}+A_2\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}-\left(B_2C_1^{-1}D_1-F_2\right)\mathbf{i}-$$
$$-\left(B_2C_1^{-1}F_1-D_2\right)\mathbf{u}+B_2C_1^{-1}\mathbf{g}_1-\mathbf{g}_2-$$
$$-\int_0^t[\left(B_2C_1^{-1}M_1-M_2\right)\frac{\partial\mathbf{i}}{\partial\tau}+\left(B_2C_1^{-1}N_1-N_2\right)\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\tau}+$$
$$+\left(B_2C_1^{-1}J_1-J_2\right)\mathbf{i}+\left(B_2C_1^{-1}H_1-H_2\right)\mathbf{u}]d\tau\},$$
$$\mathbf{f}_2=\left(C_1-B_1C_2^{-1}B_2\right)^{-1}\{-A_1\frac{\partial\mathbf{i}}{\partial t}+B_1C_2^{-1}A_2\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}-\left(D_2-B_1C_2^{-1}F_2\right)\mathbf{i}-$$
$$-\left(F_1-B_1C_2^{-1}D_2\right)\mathbf{u}+\mathbf{g}_1-B_1C_2^{-1}\mathbf{g}_2-\int_0^t[\left(M_1-B_1C_2^{-1}M_2\right)\frac{\partial\mathbf{i}}{\partial\tau}+\left(N_1-B_1C_2^{-1}N_2\right)\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\tau}+$$
$$+\left(J_1-B_1C_2^{-1}J_2\right)\mathbf{i}+\left(H_1-B_1C_2^{-1}H_2\right)\mathbf{u}]d\tau\},$$
$$K_{11}=-\left(B_2C_1^{-1}B_1-C_1^T\right)^{-1}\left(B_2C_1^{-1}\Phi_1-\Phi_2\right),$$
$$K_{12}=-\left(B_2C_1^{-1}B_1-C_1^T\right)^{-1}\left(B_2C_1^{-1}\Psi_1-\Psi_2\right),$$
$$K_{21}=-\left(C_1-B_1C_2^{-1}B_2\right)^{-1}\left(\Phi_1-B_1C_2^{-1}\Phi_2\right),$$
$$K_{22}=-\left(C_1-B_1C_2^{-1}B_2\right)^{-1}\left(\psi_1-B_1C_2^{-1}\psi_2\right)$$

(Здесь под знаком интеграла аргументами у B_ν и C_ν служат $\left(x,t\right)$; у $\mathbf{i},\mathbf{u}$ - $\left(x,\tau\right)$; у $M_\nu,N_\nu,J_\nu,H_\nu,\Phi_\nu,\psi_\nu$ - $\left(x,t,\tau\right)$).

Составим $2m$ - мерные векторы $\mathbf{z}\left(x,t\right)=\left\{\mathbf{i}\left(x,t\right),\mathbf{u}\left(x,t\right)\right\}$, $\mathbf{f}\left(x,t\right)=\left\{\mathbf{f}_1\left(x,t\right),\mathbf{f}_2\left(x,t\right)\right\}$. Тогда систему интегральных уравнений (7) можно переписать в виде

$$\frac{\partial\mathbf{z}}{\partial x}=\mathbf{f}+\int_0^t K\frac{\partial\mathbf{z}}{\partial x}d\tau, \qquad (8)$$

где

$$K=\begin{pmatrix}K_{11} & K_{12}\\ K_{21} & K_{22}\end{pmatrix}.$$

Так как $\mathbf{f}$ и K непрерывны, то непрерывным и единственным решением (8) будет

$$\frac{\partial\mathbf{z}}{\partial x}=\mathbf{f}+\int_0^t\Gamma\left(x,t,\tau\right)\mathbf{f}\left(x,\tau\right)d\tau, \qquad (9)$$

где $\Gamma\left(x,t,\tau\right)$ - резольвента ядра $K\left(x,t,\tau\right)$.

Подставляя в (9) выражение для $\mathbf{f}$ и переставляя порядок интегрирования в получающихся двойных интегралах, мы получим систему уравнений вида (3). Отсюда и следует справедливость замечания 2.

Список литературы / References

1. *Мышкис А.Д.* Смешанные функционально-дифференциальные уравнения. Новые проблемы теории функционально-дифференциальных уравнений, СМФН, 4, МАИ, М., 2003, 5–120; Journal of Mathematical Sciences. 129:5 (2005). 4111–4226.
2. *Мышкис А.Д.* Начальная задача для смешанных функционально-дифференциальных уравнений. Автомат. и телемех., 1999. № 3, 170–179.Autom. Remote Control. 60:3 (1999), 436–444.

3. *Дудко В.Г., Сумительнов В.Н., Шлопак А.А*. Решение одной смешанной задачи для системы телеграфных уравнений методом разделения переменных. Проблемы современной науки и образования, 2017. № 33 (115). 27-33.
4. *Шлопак А.А.* Решение смешанной задачи для линейных систем дифференциально-функциональных уравнений с постоянными коэффициентами при простейших граничных условиях. Проблемы современной науки и образования, 2017. № 16 (98). 26-30.
5. *Есаков В.А., Дудко В.Г., Шлопак А.А.* Об одном методе доказательства основного тождества, необходимого для определения непрерывной зависимости решения дифференциально-функциональных уравнений от начальных условий и правых частей системы в смысле среднего квадратичного отклонения. Проблемы современной науки и образования, 2018. № 12 (132). 51-56.
6. *Есаков В.А., Дудко В.Г., Шлопак А.А.* Непрерывная зависимость решения дифференциально-функциональных уравнений от начальных условий и правых частей системы в смысле среднего квадратичного отклонения. Проблемы современной науки и образования, 2019. № 12 (145).
7. *Дудко В.Г., Шлопак А.А.* О непрерывной зависимости частных производных от решения дифференциально-функциональных уравнений от начальных условий и правых частей системы в смысле среднего квадратичного отклонения. Проблемы современной науки и образования, 2019. № 12 (145).
8. *Дудко В.Г., Шлопак А.А.* О непрерывной зависимости решения смешанной задачи для систем дифференциально-функциональных уравнений от коэффициентов системы в смысле среднего квадратичного отклонения, 2020. № 12 (157). Часть 2.
9. *Шлопак А.А.* Решение смешанной задачи для линейных систем дифференциально-функциональных уравнений с постоянными коэффициентами при простейших граничных условиях, Проблемы современной науки и образования, 2017. № 16 (98). 26-30.