О НЕПРЕРЫВНОЙ ЗАВИСИМОСТИ РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ЕГО ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ В СМЫСЛЕ РАВНОМЕРНОГО ОТКЛОНЕНИЯ

Дудко В.Г.[1], Шлопак А.А.[2] Email: Dudko17157@scientifictext.ru

[1]Дудко Владимир Григорьевич - кандидат технических наук, доцент;
[2]Шлопак Александр Анфирович - кандидат технических наук, доцент,
кафедра К1 «Системы автоматического управления»,
Мытищинский филиал
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана
(Национальный исследовательский университет),
г. Мытищи

Аннотация: *в работах [2]-[4] рассмотрено подробное решение смешанной задачи для систем дифференциально-функциональных уравнений, а в [1] раскрыты новые проблемы этой теории. В работах [5]-[7] представлен новый подход, используемый для доказательства непрерывной зависимости решения дифференциально-функциональных уравнений от начальных условий и правых частей системы в смысле среднего квадратичного отклонения при простейших граничных условиях. В данной статье приведено доказательство теоремы, утверждающей непрерывную зависимость решения и его производных в смысле равномерного отклонения. При этом относительно операторов типа Вольтерра предполагается выполнение дополнительного условия. В статье рассмотрены несколько частных примеров решения поставленной задачи.*
Ключевые слова: *уравнения, функциональный, теорема.*

ON THE CONTINUOUS DEPENDENCE OF SOLVING A MIXED PROBLEM FOR SYSTEMS OF DIFFERENTIAL-FUNCTIONAL EQUATIONS AND ITS PARTIAL DERIVATIVES IN THE SENSE OF UNIFORM DEVIATION

Dudko V.G.[1], Shlopak A.A.[2]

[1]Dudko Vladimir Grigoryevich - PhD in Engineering Sciences, Associate Professor;
[2]Shlopak Alexander Anfirovich – PhD in Engineering Sciences, Associate Professor,
DEPARTMENT K1 «AUTOMATIC CONTROL SYSTEMS»,
MYTISHCHI BRANCH
BAUMAN MOSCOW STATE TECHNICAL UNIVERSITY
(NATIONAL RESEARCH UNIVERSITY),
MYTISHCHI

Abstract: *in works [2]-[4] detailed solution of mixed problem for systems of differential-functional equations is considered, and in [1] new problems of these theories are revealed. Works [5] - [7] present a new approach used to prove the continuous dependence of the solution of differential-functional equations on the initial conditions and right parts of the system in the sense of the mean quadratic deviation under the simplest boundary conditions. This article provides a proof of the theorem that asserts the continuous dependence of the solution and its derivatives in the sense of uniform deviation. In this case, with respect to operators of the Volterra type, an additional condition is supposed to be met. The article considers several specific examples of solving the problem.*
Keywords: *equations, functional, theorem.*

УДК 681.51

В [5],[6] рассматривались следующие системы дифференциально-функциональных уравнений:

$$L_\nu\left[\mathbf{i},\mathbf{u}\right]+T_\nu\left[x,t;\mathbf{i},\mathbf{u}\right]=\mathbf{g}_\nu, \qquad (\nu=1,2) \qquad (1)$$

и

$$L_\nu\left[\mathbf{i}_2,\mathbf{u}_2\right]+T_\nu\left[x,t;\mathbf{i}_2,\mathbf{u}_2\right]=\overline{\mathbf{g}}_\nu, \qquad (\nu=1,2) \qquad (2)$$

где $L_\nu\left[\mathbf{i},\mathbf{u}\right]$ являются линейными дифференциальными выражениями

$$L_1\left[\mathbf{i},\mathbf{u}\right]=A_1\frac{\partial\mathbf{i}}{\partial t}+B_1\frac{\partial\mathbf{i}}{\partial x}+C_1\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x}+D_1\mathbf{i}+F_1\mathbf{u},$$
$$L_2\left[\mathbf{i},\mathbf{u}\right]=A_2\frac{\partial\mathbf{i}}{\partial t}+B_2\frac{\partial\mathbf{i}}{\partial x}+C_2\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x}+D_2\mathbf{i}+F_2\mathbf{u},$$

$T_\nu\left[x,t;\mathbf{i},\mathbf{u}\right]$ -векторный оператор типа Вольтерра

при граничных условиях

$$\left[(C_1-P_1)\mathbf{u}+Q_1\mathbf{i}+R_1\frac{\partial\mathbf{i}}{\partial t}+S_1\int_0^t\mathbf{i}dt\right]|_{x=0}=0,\quad P_1^T\mathbf{i}\,|_{x=0}=0 \qquad (3)$$

$$\left[(C_1-P_2)\mathbf{u}-Q_2\mathbf{i}-R_2\frac{\partial\mathbf{i}}{\partial t}-S_2\int_0^t\mathbf{i}dt\right]|_{x=l}=0,\quad P_2^T\mathbf{i}\,|_{x=l}=0$$

Там же подробно определялись коэффициенты, операторы и граничные условия. В данной статье относительно операторов $T_\nu\left[x,t;\mathbf{i},\mathbf{u}\right],\nu=1,2$ предположим, что для некоторых $p\ge 0$ и $q\ge 0$ выполнено условие $(W_{p,q})$: пусть для некоторых $p^{'}\ge 0$ и $q^{'}\ge 0,$ где $p^{'}+q^{'}\le p+q,q^{'}\le q,$ функции $\mathbf{i}_s,\mathbf{u}_s(s=1,2),$ определенные в прямоугольнике $\Pi(0\le x\le l,0\le t\le t^{'})$ обладают всеми непрерывными не зависящими от порядка дифференцирования производными

$$\frac{\partial^{k+r}\mathbf{i}_s}{\partial t^k\partial x^r},\frac{\partial^{k+r}\mathbf{u}_s}{\partial t^k\partial x^r}\;\;(k+r\le p^{'}+q^{'},r\le q^{'}+1;s=1,2).$$

Тогда в Π существуют также непрерывные производные

$$\frac{\partial^{p^{'}+q^{'}}}{\partial t^{p^{'}}\partial x^{q^{'}}}T_\nu\left[x,t;\mathbf{i}_s,\mathbf{u}_s\right]\qquad(\nu=1,2;s=1,2),$$

не зависящие от порядка дифференцирования, причем найдется такое постоянное число $\mu_{p,q}\ge 0,$ что в Π будут иметь место неравенства

$$\left[\frac{\partial^{p^{'}+q^{'}}}{\partial t^{p^{'}}\partial x^{q^{'}}}(T_\nu\left[x,t;\mathbf{i}_1,\mathbf{u}_1\right]-T_\nu\left[x,t;\mathbf{i}_2,\mathbf{u}_2\right])\right]^2\le\mu_{p,q}\{\sum_{\substack{k+r\le p^{'}+q^{'}-1\\ r\le q}}(\left[\frac{\partial^{k+r}\left(\mathbf{i}_1-\mathbf{i}_2\right)}{\partial t^k\partial x^r}\right]^2+$$
$$\left[\frac{\partial^{k+r}\left(\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2\right)}{\partial t^k\partial x^r}\right]^2)+\int_0^t\sum_{\substack{k+r\le p^{'}+q^{'}-1\\ r\le q^{'}}}\left\{\left[\frac{\partial^{k+r}\left(\mathbf{i}_1-\mathbf{i}_2\right)}{\partial\tau^k\partial x^r}\right]^2+\left[\frac{\partial^{k+r}\left(\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2\right)}{\partial\tau^k\partial x^r}\right]^2\right\}d\tau\}.$$

Ясно, что если $p_1+q_1\le p_2+q_2,\quad q_1\le q_2,$ то из выполнения условия (W_{p_2,q_2}) следует выполнение условия $(W_{p_1,q_1});$ при $q=0$ условие $(W_{p,q})$ превращается в условие $(W_p).$

Воспользуемся следующим элементарным неравенством для непрерывно дифференцируемой функции $f(x),$ определенной на отрезке $x\in\left[0,l\right]:$

$$\left|f(x)\right|\le\left[\frac{1}{l}\int_0^l f^2(r)dr\right]^{\frac{1}{2}}+\left[l\int_0^l f^{'2}(r)dr\right]^{\frac{1}{2}}\quad x\in\left[0,l\right].$$

Из этого неравенства следует, что

$$f^2(x)\le\theta\left[\int_0^l f^2(r)dr+\int_0^l f^{'2}(r)dr\right]\qquad x\in\left[0,l\right], \qquad (4)$$

где $\theta = \max\left(\frac{2}{l}, 2l\right)$.

Используя это неравенство можно оценить разность решений систем уравнений (1) и (2), удовлетворяющим граничным условиям (3), через интегралы от их квадратов и от квадратов их частных производных по x, а частные производные по x от разности решений можно выразить через частные производные по t от разности решений и через сами разности этих решений из систем уравнений (1) и (2). Рассмотрим несколько частных примеров.

1. Пусть $\mathbf{i}_1, \mathbf{u}_1$ решение системы уравнений (1), удовлетворяющее граничным условиям (3) и имеющее в Π непрерывную первую производную по t. Тогда, в предположении, что определители матриц C_1 и $B_2 C_1^{-1} B_1 - C_1^T$ отличны от нуля, легко показать, что решение $\mathbf{i}_1, \mathbf{u}_1$ имеет в Π непрерывную первую производную по x (даже если заранее предполагать только существование этой производной), причем справедливо неравенство

$$\left(\frac{\partial \mathbf{i}_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial x}\right)^2 \le \omega_{0,0}\{\mathbf{i}_1^2 + \mathbf{u}_1^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{i}_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial x}\right)^2 + \mathbf{g}_1^2 + \mathbf{g}_2^2 + \int_0^t \left(\mathbf{i}_1^2 + \mathbf{u}_1^2\right) d\tau\}, \qquad (5)$$

Действительно, умножим слева первое уравнение системы (1) на $B_2 C_1^{-1}$ и из полученного равенства вычтем второе уравнение системы (1). Разрешая полученное соотношение относительно $\frac{\partial \mathbf{i}_1}{\partial x}$, получим:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{i}_1}{\partial x} &= -\left(B_2 C_1^{-1} B_1 - C_1^T\right)^{-1} B_2 C_1^{-1} A_1 \frac{\partial \mathbf{i}_1}{\partial t} + \left(B_2 C_1^{-1} B_1 - C_1^T\right)^{-1} A_2 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} - \\
&-\left(B_2 C_1^{-1} B_1 - C_1^T\right)^{-1} \left(B_2 C_1^{-1} D_1 - F_2\right)\mathbf{i}_1 - \left(B_2 C_1^{-1} B_1 - C_1^T\right)^{-1} \left(B_2 C_1^{-1} F_1 - D_2\right)\mathbf{u}_1 - \\
&-\left(B_2 C_1^{-1} B_1 - C_1^T\right)^{-1} B_2 C_1^{-1} T_1\left[x,t;\mathbf{i}_1,\mathbf{u}_1\right] + \left(B_2 C_1^{-1} B_1 - C_1^T\right)^{-1} T_2\left[x,t;\mathbf{i}_1,\mathbf{u}_1\right] + \\
&+\left(B_2 C_1^{-1} B_1 - C_1^T\right)^{-1} B_2 C_1^{-1} \mathbf{g}_1 - \left(B_2 C_1^{-1} B_1 - C_1^T\right)^{-1} \mathbf{g}_2.
\end{aligned} \qquad (6)$$

Аналогичное соотношение получаем и для $\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial x}$.

Далее, оцениваем квадрат правой части равенства (6) через сумму квадратов, коэффициенты оцениваем максимумом модуля, и, наконец, оцениваем квадраты операторов $T_\nu^2\left[x,t;\mathbf{i}_1,\mathbf{u}_1\right], (\nu = 1, 2)$ с помощью неравенства условия (W), согласно которому существует такое постоянное число $\mu \ge 0$, что для любых двух пар непрерывных в Π векторных функций $\mathbf{i}_1, \mathbf{u}_1$ и $\mathbf{i}_2, \mathbf{u}_2$ имеет место неравенство

$$(T_\nu\left[x,t;\mathbf{i}_1,\mathbf{u}_1\right] - T_\nu\left[x,t;\mathbf{i}_2,\mathbf{u}_2\right])^2 \le \mu \int_0^t \left[\left(\mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_2\right)^2 + \left(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\right)^2\right] d\tau$$

(с учетом того, что $T_\nu\left[x,t;0,0\right] \equiv 0$). Произведя аналогичные рассуждения для $\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial x}$ (при этом следует отметить, что если определитель матрицы $B_2 C_1^{-1} B_1 - C_1^T$ отличен от нуля, то и определитель матрицы $B_1 (C_1^T)^{-1} B_2 - C_1 = (B_2 C_1^{-1} B_1 - C_1^T)^T$ также отличен от нуля), мы и получим неравенство (5).

2. Предположим дополнительно, что операторы $T_\nu\left[x,t;\mathbf{i},\mathbf{u}\right]$ $\nu = 1, 2$ удовлетворяют условию (W_p) при $p = 1$, а коэффициенты в правые части системы (1) имеют в Π непрерывные производные по t. Тогда решение $\mathbf{i}_1, \mathbf{u}_1$ системы (1), имеющее в Π непрерывные производные по t до второго порядка

включительно, обладает также в Π непрерывными производными $\frac{\partial^2 \mathbf{i}_1}{\partial t \partial x}$ и $\frac{\partial^2 \mathbf{u}_1}{\partial t \partial x}$, причем имеет место неравенство

$$\left(\frac{\partial^2 \mathbf{i}_1}{\partial t \partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}_1}{\partial t \partial x}\right)^2 \leq \omega_{1,0}\{\sum_{k=0}^{2}\left[\left(\frac{\partial^k \mathbf{i}_1}{\partial t^k}\right)^2+\left(\frac{\partial^k \mathbf{u}_1}{\partial t^k}\right)^2\right]+ \\ +\sum_{k=0}^{1}\sum_{\nu=1}^{2}\left(\frac{\partial^k \mathbf{g}_\nu}{\partial t^k}\right)^2+\int_0^t\left[\mathbf{i}_1{}^2+\mathbf{u}_1{}^2+\left(\frac{\partial \mathbf{i}_1}{\partial \tau}\right)^2+\left(\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial \tau}\right)^2\right]d\tau\}, \tag{7}$$

где $\omega_{1,0} \geq 0$ - число, зависящее от коэффициентов системы уравнений (1).

Действительно, дифференцируем равенство (6) по t. Тогда из полученного равенства следует существование непрерывной производной $\frac{\partial^2 \mathbf{i}_1}{\partial t \partial x}$. Далее, квадрат правой части этого равенства оцениваем через сумму квадратов и коэффициенты оцениваем максимумом модуля, а затем квадраты операторов $T_\nu{}^2\left[x,t;\mathbf{i}_1,\mathbf{u}_1\right]$ и квадраты производных по t от операторов $\left(\frac{\partial T_\nu\left[x,t;\mathbf{i}_1,\mathbf{u}_1\right]}{\partial t}\right)^2$ оцениваем с помощью условий (W) и (W_p) при $p=1$ (наличие непрерывных производных $\frac{\partial \mathbf{i}_1}{\partial x},\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial x}$, необходимое для применения условия (W_1), следует из предыдущего пункта). Произведя аналогичные рассуждения для $\mathbf{u}_1$, мы и получим неравенство (7).

3. Предположим дополнительно (кроме предположений п.2), что операторы $T_\nu\left[x,t;\mathbf{i},\mathbf{u}\right]$ $(\nu=1,2)$ удовлетворяют условию $(W_{p,q})$ при $p=0, q=1$, а коэффициенты и правые части системы (1) имеют в Π непрерывные производные по x. Тогда решение $\mathbf{i}_1,\mathbf{u}_1$ системы (1), имеющее в Π непрерывные производные по t до второго порядка включительно, обладает также в Π непрерывными производными $\frac{\partial^2 \mathbf{i}_1}{\partial x^2},\frac{\partial^2 \mathbf{u}_1}{\partial x^2}$, причем имеет место неравенство

$$\left(\frac{\partial^2 \mathbf{i}_1}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}_1}{\partial x^2}\right)^2 \leq \omega_{0,1}\{\sum_{k=0}^{2}\left[\left(\frac{\partial^k \mathbf{i}_1}{\partial t^k}\right)^2+\left(\frac{\partial^k \mathbf{u}_1}{\partial t^k}\right)^2\right]+ \\ +\sum_{k+r\leq 1}\sum_{\nu=1}^{2}\left(\frac{\partial^{k+r} \mathbf{g}_\nu}{\partial t^k \partial x^r}\right)^2+\int_0^t\left[\mathbf{i}_1{}^2+\mathbf{u}_1{}^2+\left(\frac{\partial \mathbf{i}_1}{\partial \tau}\right)^2+\left(\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial \tau}\right)^2+\mathbf{g}_1{}^2+\mathbf{g}_2{}^2\right]d\tau\}, \tag{8}$$

где $\omega_{0,1} \geq 0$ - число, зависящее от коэффициентов системы уравнений (1).

Действительно, используя результат п.2, дифференцируем равенство (6) по x. Тогда, из полученного равенства следует существование непрерывной производной $\frac{\partial^2 \mathbf{i}_1}{\partial x^2}$. Далее, квадрат правой части полученного соотношения оцениваем суммой квадратов, коэффициенты оцениваем максимумом модуля, затем сумму $\left(\frac{\partial \mathbf{i}_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial x}\right)^2$ оцениваем с помощью неравенства (5), а сумму $\left(\frac{\partial^2 \mathbf{i}_1}{\partial t \partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}_1}{\partial t \partial x}\right)^2$ с помощью неравенства (7), квадраты операторов $T_\nu{}^2\left[x,t;\mathbf{i}_1,\mathbf{u}_1\right]$ оцениваем с помощью условия (W);

квадраты производных от операторов $\left(\frac{\partial}{\partial x}T_\nu\left[x,t;\mathbf{i}_1,\mathbf{u}_1\right]\right)^2$ оцениваем с помощью условия $\left(W_{p,q}\right)$ при $p=0, q=1,$ а входящую в правую часть этой оценки сумму $\left(\frac{\partial \mathbf{i}_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial x}\right)^2$ (эта сумма входит также и под знак интеграла) снова оцениваем с помощью неравенства (5). Проводя аналогичные рассуждения для $\mathbf{u}_1,$ мы и получим неравенство (8).

В общем случае имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Пусть для некоторых $p\geq 0$ и $q\geq 0$ операторы $T_\nu\left[x,t;\mathbf{i},\mathbf{u}\right],(\nu=1,2)$ удовлетворяют условию $\left(W_{p,q}\right);$ коэффициенты и правые части систем уравнений (1) и (2) имеют в Π $(0\leq x\leq l, 0\leq t\leq t')$ все производные, непрерывные и не зависящие от порядка дифференцирования, порядка не свыше $p+q,$ в которых дифференцирование по x производится не более q раз. Пусть определители матриц C_1 и $B_2C_1^{-1}B_1-C_1^T$ отличны от нуля в $\Pi.$ Пусть, наконец, решения $\mathbf{i}_1,\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{i}_2,\mathbf{u}_2$ систем уравнений (1) и (2) соответственно имеют в Π непрерывные производные по t до порядка $p+q+1$ включительно.

Тогда решения $\mathbf{i}_1,\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{i}_2,\mathbf{u}_2$ систем уравнений (1) и (2) обладают непрерывными не зависящими от порядка дифференцирования частными производными.

$$\frac{\partial^{p'+q'+1}\mathbf{i}_s}{\partial t^{p'}\partial x^{q'+1}} \text{ и } \frac{\partial^{p'+q'+1}\mathbf{u}_s}{\partial t^{p'}\partial x^{q'+1}} \quad (s=1,2;\ p'+q'\leq p+q; q'\leq q),$$

Причем найдется такое число $\omega_{p,q}\geq 0,$ зависящее только от коэффициентов системы уравнений и чисел p и $q,$ что будет иметь место неравенство (здесь $\mathbf{i}=\mathbf{i}_2-\mathbf{i}_1, \mathbf{u}=\mathbf{u}_2-\mathbf{u}_1$)

$$\left(\frac{\partial^{p'+q'+1}\mathbf{i}}{\partial t^{p'}\partial x^{q'+1}}\right)^2+\left(\frac{\partial^{p'+q'+1}\mathbf{u}}{\partial t^{p'}\partial x^{q'+1}}\right)^2\leq \omega_{p,q}\{\sum_{k=0}^{p'+q'+1}\left[\left(\frac{\partial^k\mathbf{i}}{\partial t^k}\right)^2+\left(\frac{\partial^k\mathbf{u}}{\partial t^k}\right)^2\right]+$$

$$+\sum_{\substack{k+r\leq p'+q'\\ r\leq q'}}\sum_{\nu=1}^{2}\left[\frac{\partial^{k+r}}{\partial t^k\partial x^r}\left(\bar{\mathbf{g}}_\nu-\mathbf{g}_\nu\right)\right]^2+\int_0^t\{\sum_{k=0}^{p'+q'}[\left(\frac{\partial^k\mathbf{i}}{\partial \tau^k}\right)^2+\left(\frac{\partial^k\mathbf{u}}{\partial \tau^k}\right)^2+$$

$$+\sum_{\substack{k+r\leq p'+q'-1\\ r\leq q'-1}}\sum_{\nu=1}^{2}\left[\frac{\partial^{k+r}}{\partial \tau^k\partial x^r}\left(\bar{\mathbf{g}}_\nu-\mathbf{g}_\nu\right)\right]^2\}d\tau\}$$

при $q'>0$ и

$$\left(\frac{\partial^{p'+q'+1}\mathbf{i}}{\partial t^{p'}\partial x^{q'+1}}\right)^2+\left(\frac{\partial^{p'+q'+1}\mathbf{u}}{\partial t^{p'}\partial x^{q'+1}}\right)^2\leq \omega_{p,q}\{\sum_{k=0}^{p'}\left[\left(\frac{\partial^k\mathbf{i}}{\partial t^k}\right)^2+\left(\frac{\partial^k\mathbf{u}}{\partial t^k}\right)^2\right]+$$

$$+\sum_{k\leq p'}\sum_{\nu=1}^{2}\left[\frac{\partial^{k}}{\partial t^k}\left(\bar{\mathbf{g}}_\nu-\mathbf{g}_\nu\right)\right]^2+\int_0^t\{\sum_{k=0}^{p'}\left[\left(\frac{\partial^k\mathbf{i}}{\partial \tau^k}\right)^2+\left(\frac{\partial^k\mathbf{u}}{\partial \tau^k}\right)^2\right]^2d\tau\}$$

при $q'=0.$

Доказательство. Если условия теоремы выполнены для некоторых p и $q,$ то они выполнены и для любых p_1,q_1 таких, что $p_1+q_1\leq p+q,$ $q_1\leq q.$ Пусть утверждение теоремы неверно для некоторых p и

$q.$ Обозначим тогда через $\overline{q}$ наименьшее из таких $q,$ а через $\overline{p}$ - наименьшее из значений $p,$ для которых теорема неверна при $q=\overline{q},$ И докажем, в условиях теоремы при $p=\overline{p}, q=\overline{q},$ во-первых, существование непрерывных и не зависящих от порядка дифференцирования частных производных от $\mathbf{i}_s, \mathbf{u}_s$ $(s=1,2)$ порядка, не превосходящего $\overline{p}+\overline{q}+1,$ в которых дифференцирование по x выполняется не более $\overline{q}+1$ раз. При этом мы можем считать, что $\overline{p}+\overline{q}>0,$ так как при $\overline{p}=\overline{q}=0$ справедливость теоремы доказана выше. Для этого воспользуемся соотношением (6), которое имеет место для решения $\mathbf{i}_1, \mathbf{u}_1$ системы уравнений (1). По построению чисел $\overline{p}, \overline{q}$ и условию теоремы существуют непрерывные производные по t от решения $\mathbf{i}_1, \mathbf{u}_1$ системы (1) до порядка $\overline{p}+\overline{q}+1$ включительно. Отсюда следует, что правая часть равенства (6) имеет непрерывные не зависящие от порядка дифференцирования производные порядка не выше $\overline{p}+\overline{q},$ в которых дифференцирование по x производится не более $\overline{q}$ раз. Действительно, коэффициенты и правые части системы (1) имеют такие производные по условию теоремы. Наличие этих производных у $\frac{\partial \mathbf{i}_1}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t}, \mathbf{i}_1, \mathbf{u}_1$ следует из условия теоремы, если $\overline{q}=0,$ и из справедливости теоремы при $p=\overline{p}+1, q=\overline{q}-1,$ если $\overline{q}\geq 1.$ Наконец, из справедливости теоремы при $p+q\leq \overline{p}+\overline{q}-1, q\leq \overline{q}$ и условия $\left(W_{\overline{p},\overline{q}}\right)$ следует, что эти производные имеют операторы $T_\nu\left[x,t;\mathbf{i}_1,\mathbf{u}\ \right], (\nu=1,2).$

Таким образом, показано, что правая часть соотношения (6) имеет непрерывные частные производные, не зависящие от порядка дифференцирования, порядка не выше $\overline{p}+\overline{q}+1,$ если дифференцирование производится не более $\overline{q}$ раз по $x.$ Следовательно, эти производные имеют и $\frac{\partial \mathbf{i}_1}{\partial t}.$ Далее проверяем, что при $\overline{p}>0$ существуют непрерывные не зависящие от порядка дифференцирования производные вида $\frac{\partial^{p'+q'}}{\partial t^{p'-1}\partial x^{q'+1}}\left(\frac{\partial \mathbf{i}_1}{\partial t}\right)$ $\left(p'+q'\leq \overline{p}+\overline{q}, q'\leq \overline{q}\right),$ где дифференцирования, стоящие перед скобками, проводятся в произвольном порядке. Следовательно, первое утверждение доказано для $\mathbf{i}_1.$ Точно также оно доказывается и для $\mathbf{u}_1.$ Так как решение $\mathbf{i}_2, \mathbf{u}_2$ системы (2) удовлетворяет соотношению (6), в котором надо $\mathbf{g}_1$ и $\mathbf{g}_2$ заменить на $\overline{\mathbf{g}}_1$ и $\overline{\mathbf{g}}_2,$ то первое утверждение справедливо и для $\mathbf{i}_2, \mathbf{u}_2.$

Отправляясь от доказанного утверждения, во-вторых, докажем, что оценка теоремы справедлива и для $p=\overline{p}, q=\overline{q}.$ Для этого вычтем равенства (6) из аналогичных равенств для $\mathbf{i}_2, \mathbf{u}_2.$ Тогда получим

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial x} &= -\left(B_2C_1^{-1}B_1-C_1^T\right)^{-1}B_2C_1^{-1}A_1\frac{\partial \mathbf{i}_1}{\partial t}+\left(B_2C_1^{-1}B_1-C_1^T\right)^{-1}A_2\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}- \\
&-\left(B_2C_1^{-1}B_1-C_1^T\right)^{-1}\left(B_2C_1^{-1}D_1-F_2\right)\mathbf{i}-\left(B_2C_1^{-1}B_1-C_1^T\right)^{-1}\left(B_2C_1^{-1}F_1-D_2\right)\mathbf{u}+ \\
&+\left(B_2C_1^{-1}B_1-C_1^T\right)^{-1}B_2C_1^{-1}(T_1\left[x,t;\mathbf{i}_1,\mathbf{u}_1\right]-T_1\left[x,t;\mathbf{i}_2,\mathbf{u}_2\right])-\left(B_2C_1^{-1}B_1-C_1^T\right)^{-1}(T_2\left[x,t;\mathbf{i}_1,\mathbf{u}_1\right]- \\
&-T_2\left[x,t;\mathbf{i}_2,\mathbf{u}_2\right])+\left(B_2C_1^{-1}B_1-C_1^T\right)^{-1}B_2C_1^{-1}(\overline{\mathbf{g}}_1-\mathbf{g}_1)-\left(B_2C_1^{-1}B_1-C_1^T\right)^{-1}(\overline{\mathbf{g}}_2-\mathbf{g}_2).
\end{aligned}$$

Аналогичное соотношение получаем и для $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}.$ Теперь продифференцируем $\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial x}$ (соответственно $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}$) p' раз по t и q' раз по x (где $p'+q'\leq \overline{p}+\overline{q}, q'\leq \overline{q}$). Из построения чисел $\overline{p}$ и $\overline{q}$ следует, что квадрат правой части полученного выражения можно оценить с помощью неравенства теоремы (если $q'>0,$ если же $q^{'}=0,$ то оценка производится непосредственно). Произведя оценку подобно тому, как выполнено в примерах 1-3, мы и докажем справедливость второго утверждения. Теорема 1 доказана.

Теперь, отправляясь от теоремы 1 и используя теорему из [8], докажем теорему, утверждающую непрерывную зависимость решения и его производных в смысле равномерного отклонения.

Теорема 2. Если для некоторых целых чисел $b\geq 0$ и $c\geq 0$ выполнены условия теоремы, доказанной в [8] при $p=b+c+1$ и теоремы 1 при $p=b,q=c,$ то разность решений, удовлетворяющих граничным условиям (3) и имеющим в Π непрерывные частные производные по t до порядка $b+c+1$ включительно, удовлетворяют в Π неравенству

$$\left(\frac{\partial^{b+c}\mathbf{i}}{\partial t^{b}\partial x^{c}}\right)^{2}+\left(\frac{\partial^{b+c}\mathbf{u}}{\partial t^{b}\partial x^{c}}\right)^{2}\leq\eta_{b,c}\{\int_{0}^{l}\sum_{k=0}^{p^{'}+q^{'}+1}\left[\left(\frac{\partial^{k}\mathbf{i}}{\partial t^{k}}\right)^{2}+\left(\frac{\partial^{k}\mathbf{u}}{\partial t^{k}}\right)^{2}\right]|_{t=0}\,dx+$$

$$+\sum_{k=0}^{b+c+1}\left(R_{1}\frac{\partial^{k}\mathbf{i}}{\partial t^{k}},\frac{\partial^{k}\mathbf{i}}{\partial t^{k}}\right)|_{\substack{t=0\\x=0}}+\sum_{k=0}^{b+c+1}\left(R_{2}\frac{\partial^{k}\mathbf{i}}{\partial t^{k}},\frac{\partial^{k}\mathbf{i}}{\partial t^{k}}\right)|_{\substack{t=0\\x=l}}+$$

$$+\int_{0}^{\tau}d\tau\int_{0}^{l}\sum_{\substack{k+r\leq b+c-1\\r\leq c-1}}\sum_{\nu=1}^{2}\left[\frac{\partial^{k+r}}{\partial\tau^{k}\partial x^{r}}\left(\bar{\mathbf{g}}_{\nu}-\mathbf{g}_{\nu}\right)\right]^{2}dx+\int_{0}^{t}d\tau\int_{0}^{l}\sum_{k=0}^{b+c+1}\sum_{\nu=1}^{2}\left[\frac{\partial^{k}}{\partial\tau^{k}}\left(\bar{\mathbf{g}}_{\nu}-\mathbf{g}_{\nu}\right)\right]^{2}dx+$$

$$+\int_{0}^{l}\sum_{\substack{k+r\leq b+c\\r\leq c}}\sum_{\nu=1}^{2}\left[\frac{\partial^{k+r}}{\partial t^{k}\partial x^{r}}\left(\bar{\mathbf{g}}_{\nu}-\mathbf{g}_{\nu}\right)\right]^{2}dx\}$$

(если $c=0,$ то первый из двойных интегралов отсутствует), где числа $\eta_{b,c}>0$ зависят от коэффициентов и правых частей систем, операторов $T_{\nu},$ коэффициентов, входящих в граничные условия, чисел b и $c,$ но не зависят от выбора конкретных решений.

Доказательство. Согласно теоремы 1 оцениваемые частные производные существуют и имеют непрерывную частную производную по $x.$ Применяем неравенство (4). Далее, подынтегральные выражения оцениваем при помощи теоремы 1. Применим затем теорему из [8] к интегралам от квадратов частных производных от разности решений по $t.$ Это и доказывает теорему 2.

Список литературы / References

1. *Мышкис А.Д.* “Смешанные функционально-дифференциальные уравнения”, Новые проблемы теории функционально-дифференциальных уравнений, СМФН, **4**, МАИ, М., 2003, 5–120; Journal of Mathematical Sciences, **129**:5 (2005), 4111–4226
2. *Мышкис А.Д.* “Начальная задача для смешанных функционально-дифференциальных уравнений”, Автомат. и телемех., 1999, № 3, 170–179; Autom. Remote Control, **60**:3 (1999), 436–444
3. *Мышкис А.Д., Шлопак А.С.* “Смешанная задача для систем дифференциально-функциональных уравнений с частными производными и операторами типа Вольтерра”, Матем. сб., **41(83)**:2 (1957), 239–256
4. *Дудко В.Г., Сумительнов В.Н., Шлопак А.А*. Решение одной смешанной задачи для системы телеграфных уравнений методом разделения переменных. Проблемы современной науки и образования, 2017. № 33 (115), 27-33.
5. *Шлопак А.А.* Решение смешанной задачи для линейных систем дифференциально-функциональных уравнений с постоянными коэффициентами при простейших граничных условиях, Проблемы современной науки и образования, 2017. № 16 (98), 26-30.
6. *Есаков В.А., Дудко В.Г., Шлопак А.А.* Об одном методе доказательства основного тождества, необходимого для определения непрерывной зависимости решения дифференциально-функциональных уравнений от начальных условий и правых частей системы в смысле среднего квадратичного отклонения. Проблемы современной науки и образования, 2018. № 12 (132). 51-56.

7. *Есаков В.А., Дудко В.Г., Шлопак А.А.* Непрерывная зависимость решения дифференциально-функциональных уравнений от начальных условий и правых частей системы в смысле среднего квадратичного отклонения. Проблемы современной науки и образования, 2019. № 12 (145).
8. *Дудко В.Г., Шлопак А.А.* О непрерывной зависимости частных производных от решения дифференциально-функциональных уравнений от начальных условий и правых частей системы в смысле среднего квадратичного отклонения. Проблемы современной науки и образования, 2019. № 12 (145).