О НЕПРЕРЫВНОЙ ЗАВИСИМОСТИ РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ОТ КОЭФФИЦИЕНТОВ СИСТЕМЫ В СМЫСЛЕ СРЕДНЕГО КВАДРАТИЧНОГО ОТКЛОНЕНИЯ

Дудко В.Г.[1], Шлопак А.А.[2] Email: Dudko17157@scientifictext.ru

[1]Дудко Владимир Григорьевич - кандидат технических наук, доцент;
[2]Шлопак Александр Анфирович - кандидат технических наук, доцент,
кафедра К1 систем автоматического управления,
Мытищинский филиал
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет),
г. Мытищи

Аннотация: *обоснование и решение смешанной задачи для системы дифференциально-функциональных уравнений приведены в трудах [1]-[3]. В работах [4]-[8] для этих систем рассмотрены непрерывная зависимость решения от начальных условий и правых частей в смысле среднего квадратичного отклонения. Приведено доказательство теоремы о непрерывной зависимости частных производных по времени от решения. При этом для операторов типа Вольтерра предполагается наличие непрерывных частных производных по времени до соответствующего порядка. В данной статье приводится доказательство непрерывной зависимости решения смешанной задачи от коэффициентов системы в смысле среднего квадратичного отклонения. Относительно матриц коэффициентов предполагается, что они симметричны и положительно определенные.*

Ключевые слова: *уравнения, функциональный, теорема.*

ON THE CONTINUOUS DEPENDENCE OF THE SOLUTION OF THE MIXED PROBLEM FOR SYSTEMS OF DIFFERENTIAL-FUNCTIONAL EQUATIONS ON THE COEFFICIENTS OF THE SYSTEM IN THE SENSE OF THE MEAN QUADRATIC DEVIATION

Dudko V.G.[1], Shlopak A.A.[2]

[1]Dudko Vladimir Grigoryevich - PhD in Engineering Sciences, Associate Professor;
[2]Shlopak Alexander Anfirovich – PhD in Engineering Sciences, Associate Professor,
DEPARTMENT K1 AUTOMATIC CONTROL SYSTEMS,
MYTISHCHI BRANCH
BAUMAN MOSCOW STATE TECHNICAL UNIVERSITY,
MYTISHCHI

Abstract: *justification and solution of mixed problem for system of differential-functional equations is given in works [1] - [3]. Works [4] - [8] for these systems consider the continuous dependence of the solution on initial conditions and right parts in the sense of the mean quadratic deviation. The proof of the theorem on the continuous dependence of partial derivatives on the solution is given. At the same time, for operators of the Volterra type, it is assumed that there are continuous partial time derivatives up to the corresponding order. This article provides evidence of the continuous dependence of the solution of the mixed problem on the coefficients of the system in the sense of the mean quadratic deviation. With respect to the coefficient matrices, it is assumed that they are symmetric and positively defined.*

Keywords: *equations, functional, theorem.*

УДК 681.51

В [5],[6] рассматривались следующая система дифференциально-функциональных уравнений:

$$L_\nu\left[\mathbf{i},\mathbf{u}\right]+T_\nu\left[x,t;\mathbf{i},\mathbf{u}\right]=\mathbf{g}_\nu, \qquad (\nu=1,2) \qquad (1)$$

где $L_\nu\left[\mathbf{i},\mathbf{u}\right]$ являются линейными дифференциальными выражениями

$$L_1[\mathbf{i},\mathbf{u}] = A_1\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t} + B_1\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial x} + C_1\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + D_1\mathbf{i} + F_1\mathbf{u},$$

$$L_2[\mathbf{i},\mathbf{u}] = A_2\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + B_2\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + C_2\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial x} + D_2\mathbf{u} + F_2\mathbf{i},$$

$T_\nu[x,t;\mathbf{i},\mathbf{u}]$ -векторный оператор типа Вольтерра

при граничных условиях

$$\left[(C_1 - P_1)\mathbf{u} + Q_1\mathbf{i} + R_1\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t} + S_1\int_0^t \mathbf{i}dt\right]\Big|_{x=0} = 0, \quad P_1^T\mathbf{i}\,|_{x=0} = 0 \qquad (2)$$

$$\left[(C_1 - P_2)\mathbf{u} - Q_2\mathbf{i} - R_2\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t} - S_2\int_0^t \mathbf{i}dt\right]\Big|_{x=l} = 0, \quad P_2^T\mathbf{i}\,|_{x=l} = 0$$

Пусть $\mathbf{i},\mathbf{u}$ - непрерывно дифференцируемое решение систем уравнений (1) при граничных условиях (2) и $\mathbf{i}_0,\mathbf{u}_0$ - непрерывно дифференцируемое решение системы уравнений

$$L_\nu^{(0)}[\mathbf{i},\mathbf{u}] + T_\nu[x,t;\mathbf{i},\mathbf{u}] = \mathbf{g}_\nu^{(0)} \quad (\nu = 1,2) \qquad (3)$$

При тех же граничных условиях (2). Здесь

$$L_1^{(0)}[\mathbf{i},\mathbf{u}] = A_1^{(0)}\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t} + B_1^{(0)}\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial x} + C_1^{(0)}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + D_1^{(0)}\mathbf{i} + F_1^{(0)}\mathbf{u},$$

$$L_2^{(0)}[\mathbf{i},\mathbf{u}] = A_2^{(0)}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + B_2^{(0)}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + C_2^{(0)}\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial x} + D_2^{(0)}\mathbf{u} + F_2^{(0)}\mathbf{i},$$

Матрицы $A_1^{(0)},\ldots,F_2^{(0)}$ и векторы $\mathbf{g}_\nu^{(0)}$ удовлетворяют требованиям, наложенным в [7] на матрицы $A_1,\ldots,F_2$ и векторы $\mathbf{g}_\nu$ соответственно. Считая коэффициенты $A_1^{(0)},\ldots,F_2^{(0)}$ фиксированными, предположим, что элементы матриц

$$D_\nu, F_\nu, \frac{\partial A_\nu}{\partial t}, \frac{\partial B_\nu}{\partial x} \qquad (\nu = 1,2) \text{ и } \frac{\partial C_1}{\partial x}$$

равномерно ограничены в прямоугольнике $\Pi(0 \le x \le l, 0 \le t \le t')$, т.е. абсолютные величины элементов этих матриц не превосходят некоторой константы $M > 0$.

Целью является при соответствующих дополнительных предположениях относительно коэффициентов получить неравенство, из которого будет следовать непрерывная зависимость решения системы от коэффициентов в смысле среднего квадратичного отклонения.

В дальнейшем используем следующую лемму.

Лемма. Пусть A и B - квадратные матрицы порядка $m \ge 1$ с элементами, непрерывными по совокупности x,t в $\Pi(0 \le x \le l, 0 \le t \le t')$, причем матрица $A > 0$ и симметричная, а элементы матрицы B по абсолютной величине достаточно малы. Тогда матрица $A + B > 0$ а Π.

Доказательство. Так как матрица $A = \|a_{kn}\|$ симметричная и положительно определенная, то собственные числа ее вещественные и положительные. Они, как известно, являются корнями алгебраического уравнения.

$$(-\lambda)^m + h_1(-\lambda)^{m-1} + h_2(-\lambda)^{m-2} + \ldots + h_m = 0, \qquad (4)$$

где $h_1 = \sum_k a_{kk}$, $h_2 = \sum_{n<k}\begin{vmatrix} a_{nn} & a_{nk} \\ a_{kn} & a_{kk}\end{vmatrix}, \ldots, \quad (k = \overline{1,m}).$

Отметим, что матрица C положительно определена тогда и только тогда, когда все собственные числа симметричной матрицы $\frac{C + C^T}{2}$ положительны (в силу тождества $(Ca,a) = (\frac{C + C^T}{2}a, a)$). Но собственные числа матрицы $\dfrac{A+B+(A+B)^T}{2}=A+\dfrac{B+B^T}{2}=\left\| a_{kn}+\dfrac{b_{kn}+b_{nk}}{2} \right\|$ являются корнями алгебраического уравнения

$$\left(-\lambda\right)^m+\tilde{h}_1\left(-\lambda\right)^{m-1}+\tilde{h}_2\left(-\lambda\right)^{m-2}+...+\tilde{h}_m=0, \qquad (5)$$

где $\tilde{h}_1,\tilde{h}_2,...,\tilde{h}_m$ имеют ту же структуру, что и $h_1,h_2,...,h_m$ соответственно. Коэффициенты уравнения (5) сколь угодно мало отличаются от соответствующих коэффициентов уравнения (4). Следовательно, в силу непрерывной зависимости корней алгебраического уравнения от коэффициентов, собственные числа матрицы $A+\dfrac{B+B^T}{2}$ сколь угодно мало отличаются от собственных чисел матрицы A. Но собственные числа матрицы A имеют в Π положительный минимум, а потому и собственные числа матрицы $A+\dfrac{B+B^T}{2}$ положительны. Отсюда и следует справедливость леммы 1.

Впредь для квадратной матрицы P будем обозначать через $|P|$ корень квадратный из наибольшего собственного значения матрицы $P^TP.$ Нетрудно видеть, что эта последняя матрица является симметричной и, в силу неравенства $(P^TPa,a)=(Pa,Pa)\geq 0,$ неотрицательно определенной. Но сумма всех собственных значений матрицы P^TP равна, как это следует из формулы Виета, следу этой матрицы. Если $P=\|p_{kn}\|,$ то общий элемент q_{kn} матрицы P^TP определяется по формуле

$$q_{kn}=\sum_{r=1}^{m}p_{rk}p_{rn}.$$

Поэтому след матрицы P^TP равен

$$\sum_{k=1}^{m}q_{kk}=\sum_{k=1}^{m}\sum_{r=1}^{m}p_{rk}p_{rn}=\sum_{k,n=1}^{m}p_{kn}{}^2.$$

Таким образом,

$$|P|^2\leq\sum_{k,n=1}^{m}p_{kn}{}^2,$$

т.е. при достаточно малых $|p_{kn}|$ величина $|P|$ будет сколь угодно малой.

Если элементы матрицы P являются непрерывными на некотором компактном множестве Q функциями, то под $|P|$ будем понимать максимум на Q корня квадратного из наибольшего собственного значения матрицы $P^TP.$ Ясно тогда, что

$$|P|^2\leq\max_{Q}\sum_{k,n=1}^{m}p_{kn}{}^2(x,t).$$

<u>Теорема.</u> Пусть $\mathbf{i},\mathbf{u}$ и $\mathbf{i}_0,\mathbf{u}_0$ соответственно решения систем уравнений (1) и (3), удовлетворяющие граничным условиям (2) и для некоторого α выполнены условия

$$A_\nu>0,(x\in[0,l],t\in[0,t^{'}]),$$

$$R_\nu\geq 0,S_\nu\geq 0,(t\in[0,t^{'}];\nu=1,2)$$

и при $t\in[0,t^{'}]$

$$-B_2|_{x=0}\ge 0, B_2|_{x=l}\ge 0, -\frac{dS_\nu}{dt}+2\alpha S_\nu\ge 0, (\nu=1,2),$$

$$-\frac{dR_1}{dt}-B_1|_{x=0}+2Q_1+2\alpha R_1\ge 0,$$

$$-\frac{dR_2}{dt}-B_1|_{x=l}+2Q_2+2\alpha R_2\ge 0.$$

При этом матрицы $A_1^{(0)}$ и $A_2^{(0)}$ положительно определены в $\Pi.$ Тогда, найдутся такие числа $\varepsilon>0$ и $\eta>0,$ не зависящие от коэффициентов, что если элементы матриц $A_\nu-A_\nu^{(0)}$ $(\nu=1,2)$ по абсолютной величине меньше $\varepsilon,$ то для разности решений $\mathbf{I}=\mathbf{i}-\mathbf{i}_0,$ $\mathbf{U}=\mathbf{u}-\mathbf{u}_0$ будет справедливо неравенство

$$\int_0^l\left(\mathbf{I}^2+\mathbf{U}^2\right)dx\le\vartheta\{\int_0^l\left(\mathbf{I}^2+\mathbf{U}^2\right)|_{t=0}\,dx+\left(R_1\mathbf{I},\mathbf{I}\right)|_{\substack{t=0\\x=0}}+$$
$$+\left(R_2\mathbf{I},\mathbf{I}\right)|_{\substack{t=0\\x=0}}+\int_0^t dt\int_0^l\sum_{\nu=1}^{2}[\left|\mathbf{g}_\nu-\mathbf{g}_\nu^{(0)}\right|^2+\left|A_\nu-A_\nu^{(0)}\right|^2+\left|B_\nu-B_\nu^{(0)}\right|^2+ \qquad (6)$$
$$+\left|C_\nu-C_\nu^{(0)}\right|^2+\left|D_\nu-D_\nu^{(0)}\right|^2+\left|F_\nu-F_\nu^{(0)}\right|^2]dx\}$$

Доказательство. Из первого (соответственно второго) уравнения системы (1) вычтем первое (второе) уравнение системы (3).

Далее, вычтем из обеих частей полученного соотношения выражение

$$A_1\frac{\partial\mathbf{i}_0}{\partial t}+B_1\frac{\partial\mathbf{i}_0}{\partial x}+C_1\frac{\partial\mathbf{u}_0}{\partial x}+D_1\mathbf{i}_0+F_1\mathbf{u}_0$$

$$(A_2\frac{\partial\mathbf{u}_0}{\partial t}+B_1\frac{\partial\mathbf{u}_0}{\partial x}+C_1\frac{\partial\mathbf{i}_0}{\partial x}+D_1\mathbf{u}_0+F_1\mathbf{i}_0)$$

И после этого перенесем все слагаемые, входящие в систему (3) в правую часть. Тогда получим, что разность решений $\mathbf{I}=\mathbf{i}-\mathbf{i}_0,$ $\mathbf{U}=\mathbf{u}-\mathbf{u}_0$ систем уравнений (1) и (3) удовлетворяют соотношениям

$$A_1\frac{\partial\mathbf{I}}{\partial t}+B_1\frac{\partial\mathbf{I}}{\partial x}+C_1\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial x}+D_1\mathbf{I}+F_1\mathbf{U}+T_1\left[x,t;\mathbf{I}+\mathbf{i}_0,\mathbf{U}+\mathbf{u_0}\right]=$$
$$=T_1\left[x,;\mathbf{i}_0,\mathbf{u_0}\right]+\mathbf{g}_1-\mathbf{g}_1^{(0)}-\left(A_1-A_1^{(0)}\right)\frac{\partial\mathbf{i}_0}{\partial t}-\left(B_1-B_1^{(0)}\right)\frac{\partial\mathbf{i}_0}{\partial x}-$$
$$-\left(C_1-C_1^{(0)}\right)\frac{\partial\mathbf{u}_0}{\partial x}-\left(D_1-D_1^{(0)}\right)\mathbf{i}_0-\left(F_1-F_1^{(0)}\right)\mathbf{u_0},$$
$$A_2\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial t}+B_2\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial x}+C_2\frac{\partial\mathbf{I}}{\partial x}+D_2\mathbf{U}+F_2\mathbf{I}+T_2\left[x,t;\mathbf{I}+\mathbf{i}_0,\mathbf{U}+\mathbf{u_0}\right]= \qquad (7)$$
$$=T_2\left[x,;\mathbf{i}_0,\mathbf{u_0}\right]+\mathbf{g}_2-\mathbf{g}_2^{(0)}-\left(A_2-A_2^{(0)}\right)\frac{\partial\mathbf{u}_0}{\partial t}-\left(B_2-B_2^{(0)}\right)\frac{\partial\mathbf{u}_0}{\partial x}-$$
$$-\left(C_2-C_2^{(0)}\right)\mathbf{i}_0-\left(D_2-D_2^{(0)}\right)\mathbf{u}_0-\left(F_2-F_2^{(0)}\right)\mathbf{i}_0$$

и граничным условиям (2).

Считая правые части системы (7) известными, с помощью равенств $\mathbf{I}=e^{\alpha t}\mathbf{j},$ $\mathbf{U}=e^{\alpha t}\mathbf{v}$ введем новые неизвестные векторы $\mathbf{j}$ и $\mathbf{v}.$ При этом система (7) перейдет в систему (относительно $\mathbf{j}$ и $\mathbf{v}$)

$$A_1\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}+B_1\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial x}+C_1\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}+\left(D_1+\alpha A_1\right)\mathbf{j}+F_1\mathbf{v}+e^{-\alpha t}T_1\left[x,t;e^{\alpha t}\mathbf{j}+\mathbf{i}_0,e^{\alpha t}\mathbf{v}+\mathbf{u_0}\right]=$$

$$=e^{-\alpha t}\{T_1\left[x,t;\mathbf{i}_0,\mathbf{u_0}\right]+\mathbf{g}_1-\mathbf{g}_1{}^{(0)}-\left(A_1-A_1^{(0)}\right)\frac{\partial \mathbf{i}_0}{\partial t}-\left(B_1-B_1^{(0)}\right)\frac{\partial \mathbf{i}_0}{\partial x}-$$

$$-\left(C_1-C_1^{(0)}\right)\frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial x}-\left(D_1-D_1^{(0)}\right)\mathbf{i}_0-\left(F_1-F_1^{(0)}\right)\mathbf{u_0}\},$$

$$A_2\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+B_2\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}+C_2\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial x}+\left(D_2+\alpha A_2\right)\mathbf{v}+F_2\mathbf{j}+e^{-\alpha t}T_2\left[x,t;e^{\alpha t}\mathbf{j}+\mathbf{i}_0,e^{\alpha t}\mathbf{v}+\mathbf{u_0}\right]=$$

$$=e^{-\alpha t}\{T_2\left[x,t;\mathbf{i}_0,\mathbf{u_0}\right]+\mathbf{g}_2-\mathbf{g}_2{}^{(0)}-\left(A_2-A_2^{(0)}\right)\frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial t}-\left(B_2-B_2^{(0)}\right)\frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial x}-$$

$$-\left(C_2-C_2^{(0)}\right)\frac{\partial \mathbf{i}_0}{\partial x}-\left(D_2-D_2^{(0)}\right)\mathbf{u}_0-\left(F_2-F_2^{(0)}\right)\mathbf{i}_0\}.$$

Далее, как и в [6], получим тождество, которому удовлетворяют векторы $\mathbf{j}$ и $\mathbf{v}$,

$$\frac{d}{dt}\{\int_0^l[(A_1\mathbf{j},\mathbf{j})+(A_2\mathbf{v},\mathbf{v})]dx+[(R_1\mathbf{j},\mathbf{j})+e^{-2\alpha t}(S_1\int_0^t e^{\alpha t}\mathbf{j}dt,\int_0^t e^{\alpha t}\mathbf{j}dt)]|_{x=0}+$$

$$+[(R_2\mathbf{j},\mathbf{j})+e^{-2\alpha t}(S_2\int_0^t e^{\alpha t}\mathbf{j}dt,\int_0^t e^{\alpha t}\mathbf{j}dt)]|_{x=l}\}=$$

$$=\int_0^l K_\alpha(\mathbf{j},\mathbf{v})dx+2e^{-\alpha t}\int_0^l\{(T_1[x,t;\mathbf{i}_0,\mathbf{u_0}]-T_1[x,t;e^{\alpha t}\mathbf{j}+\mathbf{i}_0,e^{\alpha t}\mathbf{v}+\mathbf{u_0}],\mathbf{j})+$$

$$+(T_2[x,t;\mathbf{i}_0,\mathbf{u_0}]-T_2[x,t;e^{\alpha t}\mathbf{j}+\mathbf{i}_0,e^{\alpha t}\mathbf{v}+\mathbf{u_0}],\mathbf{v})\}dx+$$

$$+2e^{-\alpha t}\int_0^l\{([\mathbf{g}_1-\mathbf{g}_1{}^{(0)}-\left(A_1-A_1^{(0)}\right)\frac{\partial \mathbf{i}_0}{\partial t}-\left(B_1-B_1^{(0)}\right)\frac{\partial \mathbf{i}_0}{\partial x}-\left(C_1-C_1^{(0)}\right)\frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial x}-$$

$$-\left(D_1-D_1^{(0)}\right)\mathbf{i}_0-\left(F_1-F_1^{(0)}\right)\mathbf{u_0}],\mathbf{j})+([\mathbf{g}_2-\mathbf{g}_2{}^{(0)}-\left(A_2-A_2^{(0)}\right)\frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial t}-$$

$$-\left(B_2-B_2^{(0)}\right)\frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial x}-\left(C_2-C_2^{(0)}\right)\frac{\partial \mathbf{i}_0}{\partial x}-\left(D_2-D_2^{(0)}\right)\mathbf{u}_0-\left(F_2-F_2^{(0)}\right)\mathbf{i}_0],\mathbf{v})\}dx+ \tag{8}$$

$$+\{e^{-2\alpha t}([\frac{dS_1}{dt}-2\alpha S_1]\int_0^t e^{\alpha t}\mathbf{j}dt,\int_0^t e^{\alpha t}\mathbf{j}dt)+([\frac{dR_1}{dt}+B_1-2Q_1-2\alpha R_1]\mathbf{j},\mathbf{j})+(B_2\mathbf{v},\mathbf{v})\}|_{x=0}+$$

$$+\{e^{-2\alpha t}([\frac{dS_2}{dt}-2\alpha S_2]\int_0^t e^{\alpha t}\mathbf{j}dt,\int_0^t e^{\alpha t}\mathbf{j}dt)+([\frac{dR_2}{dt}-B_1-2Q_2-2\alpha R_2]\mathbf{j},\mathbf{j})-(B_2\mathbf{v},\mathbf{v})|_{x=l}\,.$$

$$+\{e^{-2\alpha t}([\frac{dS_1}{dt}-2\alpha S_1]\int_0^t e^{\alpha t}\mathbf{j}dt,\int_0^t e^{\alpha t}\mathbf{j}dt)+([\frac{dR_1}{dt}+B_1-2Q_1-2\alpha R_1]\mathbf{j},\mathbf{j})+(B_2\mathbf{v},\mathbf{v})\}|_{x=0}+$$

$$+\{e^{-2\alpha t}([\frac{dS_2}{dt}-2\alpha S_2]\int_0^t e^{\alpha t}\mathbf{j}dt,\int_0^t e^{\alpha t}\mathbf{j}dt)+([\frac{dR_2}{dt}-B_1-2Q_2-2\alpha R_2]\mathbf{j},\mathbf{j})-(B_2\mathbf{v},\mathbf{v})|_{x=l}\,.$$

Здесь $K_\alpha(\mathbf{j},\mathbf{v})$ означает то же самое, что и в [6]. Согласно условий теоремы имеем: $A_\nu = A_\nu^{(0)} + \tilde{A}_\nu$, где $\tilde{A}_\nu$ - квадратная матрица, имеющая такую же структуру, какую имеет матрица $A_\nu^{(0)}$, причем по абсолютной величине элементы матрицы $\tilde{A}_\nu$ достаточно малы. Отсюда следует:

1. При некотором достаточно большом α, не зависящим от коэффициентов $A_1,\dots,F_2$, квадратичная форма $K_\alpha(\mathbf{j},\mathbf{v}) + 2\mathbf{j}^2 + 2\mathbf{v}^2$ будет отрицательно определенной.

2. Для симметричных матриц A_1 и A_2 будут справедливы неравенства

$$\begin{aligned} &\lambda_1\mathbf{j}^2 \le \left(A_1\mathbf{j},\mathbf{j}\right) \le \lambda_2\mathbf{j}^2, \\ &\lambda_1'\mathbf{v}^2 \le \left(A_2\mathbf{v},\mathbf{v}\right) \le \lambda_2'\mathbf{v}^2, \end{aligned} \qquad (9)$$

где $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_1',\lambda_2'$ - некоторые положительные числа, не зависящие от матриц A_1 и A_2.

Действительно, перепишем квадратичную форму $K_\alpha(\mathbf{j},\mathbf{v}) + 2\mathbf{j}^2 + 2\mathbf{v}^2$ в виде (E - единичная матрица m - го порядка)

$$\begin{aligned} &K_\alpha(\mathbf{j},\mathbf{v}) + 2\mathbf{j}^2 + 2\mathbf{v}^2 = (-\alpha[\frac{1}{\alpha}(2D_1 - \frac{\partial A_1}{\partial t} - \frac{\partial B_1}{\partial x} - 2E) + 2\tilde{A}_1 + \\ &+2A_1^{(0)}]\mathbf{j},\mathbf{j}) + 2([\frac{\partial C_2}{\partial x} - F_1^T - F_2]\mathbf{j},\mathbf{v}) + (-\alpha[\frac{1}{\alpha}(2D_2 - \frac{\partial A_2}{\partial t} - \frac{\partial B_2}{\partial x} - \\ &-2E) + 2\tilde{A}_2 + 2A_2^{(0)}]\mathbf{v},\mathbf{v}) = -\alpha\{(2A_1^{(0)}\mathbf{j},\mathbf{j}) + (2A_2^{(0)}\mathbf{v},\mathbf{v}) + \\ &+([\frac{1}{\alpha}(2D_1 - \frac{\partial A_1}{\partial t} - \frac{\partial B_1}{\partial x} - 2E) + 2\tilde{A}_1]\mathbf{j},\mathbf{j}) - \frac{2}{\alpha}([\frac{\partial C_2}{\partial x} - F_1^T - F_2]\mathbf{j},\mathbf{v}) + \\ &+([\frac{1}{\alpha}(2D_2 - \frac{\partial A_2}{\partial t} - \frac{\partial B_2}{\partial x} - 2E) + 2\tilde{A}_2]\mathbf{v},\mathbf{v})\}. \end{aligned}$$

Тогда в силу леммы 1, при достаточно большом α, квадратичная форма, стоящая в фигурных скобках будет положительно определенной. Отсюда и вытекает справедливость утверждения 1.

Так как наибольшие $\overline{\lambda}(A_\nu)$ и наименьшие $\underline{\lambda}(A_\nu)$ собственные числа матриц A_1 и A_2 при достаточной близости этих матриц к $A_1^{(0)}$ и $A_2^{(0)}$ как угодно мало отличаются в Π от наибольших $\overline{\lambda}(A_\nu)$ и наименьших $\underline{\lambda}(A_\nu)$ собственных чисел матриц $A_1^{(0)}$ и $A_2^{(0)}$ соответственно, то для соответственно подобранного $\varepsilon > 0$ справедливы следующие неравенства

$$\overline{\lambda}(A_1) \le \lambda_1,\ \underline{\lambda}(A_1) \ge \lambda_2, \qquad (10)$$

$$\overline{\lambda}(A_2) \le \lambda_1',\ \underline{\lambda}(A_2) \ge \lambda_2', \qquad (11)$$

если элементы матриц $A_\nu - A_\nu^{(0)}$ $(\nu = 1,2)$ по абсолютной величине меньше ε, где числа $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_1',\lambda_2'$ положительны и не зависят от коэффициентов $A_1,\dots,F_2$. Теперь ясно, что неравенства (9) непосредственно следуют из неравенств (10) и (11). Таким образом, утверждение 2 доказано.

Используя тождество (8) и утверждения 1 и 2, получим неравенство

$$\int_0^l \left(\mathbf{I}^2+\mathbf{U}^2\right)dx \le \bar{\vartheta}\{\int_0^l \left(\mathbf{I}^2+\mathbf{U}^2\right)|_{t=0}\ dx + \left(R_1\mathbf{I},\mathbf{I}\right)|_{\substack{t=0\\x=0}} + \left(R_2\mathbf{I},\mathbf{I}\right)|_{\substack{t=0\\x=0}} +$$
$$+\int_o^t dt\int_0^l \{\left(\mathbf{g}_1-\mathbf{g}_1^{(0)}\right)^2+\left(\mathbf{g}_2-\mathbf{g}_2^{(0)}\right)^2+\left[\left(A_1-A_1^{(0)}\right)\frac{\partial \mathbf{i}_0}{\partial t}\right]^2+$$
$$+\left[\left(A_2-A_2^{(0)}\right)\frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial t}\right]^2+\left[\left(B_1-B_1^{(0)}\right)\frac{\partial \mathbf{i}_0}{\partial x}\right]^2+\left[\left(B_2-B_2^{(0)}\right)\frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial x}\right]^2+ \qquad (12)$$
$$+\left[\left(C_1-C_1^{(0)}\right)\frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial x}\right]^2+\left[\left(D_1-D_1^{(0)}\right)\mathbf{i}_0\right]^2+\left[\left(D_2-D_2^{(0)}\right)\mathbf{u}_0\right]^2+$$
$$+\left[\left(F_1-F_1^{(0)}\right)\mathbf{u}_0\right]^2+\left[\left(F_2-F_2^{(0)}\right)\mathbf{i}_0\right]^2\}dx,$$

где $\bar{\vartheta}>0$ некоторое число, не зависящее от коэффициентов $A_1,...,F_2$.

Из неравенства (12) пользуясь тем, что $\left(A\alpha, A\alpha\right)=\left|A\alpha\right|^2\le\left|A\right|^2\left|\alpha\right|^2$ и, обозначая

$$\bar{\vartheta}=\max_{\Pi}\left\{1,\left(\frac{\partial \mathbf{i}_0}{\partial t}\right)^2,\left(\frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial t}\right)^2,\left(\frac{\partial \mathbf{i}_0}{\partial x}\right)^2,\left(\frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial x}\right)^2,\mathbf{i}_0{}^2,\mathbf{u}_0{}^2\right\}$$

через ϑ, получим неравенство (6). Теорема доказана.

Список литературы / References

1. *Мышкис А.Д.* “Смешанные функционально-дифференциальные уравнения”. Новые проблемы теории функционально-дифференциальных уравнений, СМФН, **4**, МАИ, М., 2003, 5–120; Journal of Mathematical Sciences, **129**:5 (2005), 4111–4226.
2. *Мышкис А.Д.* “Начальная задача для смешанных функционально-дифференциальных уравнений”, Автомат. и телемех., 1999 № 3. 170–179; Autom. Remote Control, **60**:3 (1999), 436–444.
3. *Мышкис А.Д., Шлопак А. С.* “Смешанная задача для систем дифференциально-функциональных уравнений с частными производными и операторами типа Вольтерра”, Матем. сб., **41(83)**:2 (1957), 239–256.
4. *Дудко В.Г., Сумительнов В.Н., Шлопак А.А.* Решение одной смешанной задачи для системы телеграфных уравнений методом разделения переменных. Проблемы современной науки и образования, 2017. № 33 (115), 27-33.
5. *Шлопак А.А.* Решение смешанной задачи для линейных систем дифференциально-функциональных уравнений с постоянными коэффициентами при простейших граничных условиях, Проблемы современной науки и образования 2017. № 16 (98), 26-30.
6. *Есаков В.А., Дудко В.Г., Шлопак А.А.* Об одном методе доказательства основного тождества, необходимого для определения непрерывной зависимости решения дифференциально-функциональных уравнений от начальных условий и правых частей системы в смысле среднего квадратичного отклонения. Проблемы современной науки и образования, 2018. № 12 (132), 51-56.
7. *Есаков В.А., Дудко В.Г., Шлопак А.А.* Непрерывная зависимость решения дифференциально-функциональных уравнений от начальных условий и правых частей системы в смысле среднего квадратичного отклонения. Проблемы современной науки и образования, 2019. № 12 (145).
8. *Дудко В.Г., Шлопак А.А.* О непрерывной зависимости частных производных от решения дифференциально-функциональных уравнений от начальных условий и правых частей системы в смысле среднего квадратичного отклонения. Проблемы современной науки и образования, 2019. № 12 (145).