ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИИ ИСТОЧНИКА В ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЕМ

Аблабеков Б.С.[1], Байсеркеева А.Б.[2] Email: Ablabekov1791@scientifictext.ru

[1]Аблабеков Бактыбай Сапарбекович - доктор физико-математических наук, профессор,
кафедра прикладной математики, информатики и компьютерных технологий,
Кыргызский национальный университет им. Ж.Баласагына, г. Бишкек;
[2]Байсеркеева Айнура Бектургановна - преподаватель,
кафедра теоретической и прикладной математики,
Иссык-Кульский государственный университет им. К. Тыныстанова,
г. Каракол, Кыргызская республика

Аннотация: *изучается обратная задача определения источника, зависящего от времени, для многомерного псевдопараболического уравнения. Дополнительная информация задаётся в виде интегрального переопределения с некоторой заданной весовой функцией. При решении исходной задачи осуществляется переход от обратной задачи к некоторой вспомогательной прямой задаче. Получено достаточное условие однозначной разрешимости рассматриваемой задачи. При доказательстве разрешимости задачи используется метод интегральных уравнений. Существование и единственность интегрального уравнения доказаны с помощью принципа сжатых отображений.*

Ключевые слова: *обратная задача, псевдопараболические уравнения, интегральное переопределение.*

INVERSE PROBLEM OF DETERMINING THE SOURCE FUNCTION IN PSEUDOPARABOLIC EQUATIONS WITH INTEGRAL OVER DETERMINATION

Ablabekov B.S.[1], Baiserkeeva A.B.[2]

[1]Ablabekov Baktybai Saparbekovich - Doctor of physico-mathematical sciences, Professor,
DEPARTMENT OF APPLIED MATHEMATICS, INFORMATICS AND COMPUTER TECHNOLOGIES,
KYRGYZ NATIONAL UNIVERSITY OF JUSUP BALASAGYN, BISHKEK;
[2]Baiserkeeva Ainura Bekturganovna - Lecturer,
DEPARTMENT OF THEORETICAL AND APPLIED MATHEMATICS,
ISSYK-KUL STATE UNIVERSITY OF KASIM TYNYSTANOV,
KARAKOL, REPUBLIC OF KYRGYZSTAN

Abstract: *studied the inverse problem of determining a source, depending on the time for the multidimensional pseudoparabolic equation. Additional information is given in form of an integral redefinition with a given weight function. To study solvability of the inverse problem, we realize a conversion from inverse problem to a some direct problem. We establish conditions for the existence and uniqueness of the classical solution of the problem considered. To prove solvability of the problem, we use the method of integral equations.*
The existence and uniqueness of the integral equation are proved by means of the contraction mappings principle.

Keywords: *inverse problem, pseudo-parabolic equations, integral redefinition.*

УДК 517.946

Введение. Постановка задачи.

Под обратными задачами для дифференциальных уравнений будем понимать задачи определения коэффициентов, правой части, начальных или граничных условий по некоторой дополнительной информации о решении прямой задачи. Наиболее полное современное состояние теории обратных для дифференциальных уравнений с обширной библиографией отражены в монографиях [1, 2, 4, 10]. Обратные задачи с интегральным переопределением для параболических и гиперболических уравнений второго порядка уравнений изучались в [3 – 5, 7 - 8, 10], а для псевдопараболических уравнений при других предположениях на входные данные и другими методами изучены в работе [1].

Пусть Ω- ограниченная область в R^n с гладкой границей $\partial\Omega \in C^2$, $\Omega_T = \Omega \times (0,T)$, где $T > 0$ - цилиндр с боковой поверхностью $S_T = \partial\Omega \times [0,T]$.

Рассмотрим в области Ω_T обратную задачу определения пары функций $\{u(x,t) \in C^1(0,T;L_2(\Omega)), \quad f(t) \in C[0,T]\}$ в псевдопараболическом уравнении

$$u_t - \Delta_x u_t - \beta\, \Delta_x u + q(x,t)u = f(t)h(x,t) + g(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_T, \qquad (1)$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad x\in\overline{\Omega}, \qquad (2)$$

$$u\big|_{S_T}=0, \qquad (3)$$

$$\int\limits_{\Omega} u(x,t)w(x)dx=\psi(t), \quad 0\le t\le T\,, \qquad (4)$$

где $q(x,t)\ge 0,\ \beta\ge 0$ - постоянные.

Условие (4) называется интегральным переопределением.

В настоящей работе установлены достаточные условия, при которых решение обратной задачи (1)–(3) существует и единственно.

2. Основной результат. Существование и единственность решения обратной задачи (1)–(3)

Докажем вспомогательную лемму.

Лемма 1. Пусть $u\in W_2^2(\Omega)\cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Тогда существует обратный оператор $(I-\Delta)^{-1}$, причем

$$\left\|(I-\Delta)^{-1}\right\|_{L_2(\Omega)}\le\frac{1}{2}\ .$$

Доказательство. Установим свойства обратимости оператора $I-\Delta$. Для этого достаточно показать его строгую положительность. Действительно, пусть $u\in W_2^2(\Omega)\cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Тогда

$$<(I-\Delta)u,u>=\int\limits_{\Omega}u^2(x,t)dx-\int\limits_{\Omega}u(x,t)\ \Delta u(x,t))dx=$$

$$=\int\limits_{\Omega}\ u^2(x,t)dx+\int\limits_{\Omega}|\ \nabla_x u(x,t)\ |^2\ dx=\left\|\nabla_x u\right\|^2_{L_2(\Omega)}+\left\|u\right\|^2_{L_2(\Omega)}.$$

Отсюда, после применения неравенство Фридрихса, получаем

$$\left\|(I-\Delta)u\right\|_{L_2(\Omega)}\cdot\left\|u\right\|_{L_2(\Omega)}\ge\left|((I-\Delta)u,u)\right|\ge 2\left\|u\right\|^2_{L_2(\Omega)}.$$

Так как оператор $I-\Delta$ является положительно определенной, то отсюда и в силу известной теоремы (например [9]), следует заключение леммы.

Теорема 1. Пусть $w(x)\in W_2^2(\Omega)\cap\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega),\quad \psi(t)\in C^1([0,T]),\quad \varphi(x)\in W_2^2(\Omega)$, $h(x,t),g(x,t)\in C(0,T;L_2(\Omega))$ и $\left|<h,w>\right|\ge\delta>0$ при всех $t\in[0,T]$, $\frac{1}{2}\left[\delta^{-2}\|h\|_{C(0,T;L_2(\Omega))}\|\Delta w\|^2_{L_2(\Omega)}+1\right]<1$. Кроме того, для функций $\varphi(x),\psi(t)$ выполнены условия согласования $\int\limits_{\Omega}\varphi(x)w(x)dx=\psi(0)$. Тогда обратная задача (1)-(4) имеет единственное решение в классе $u\in C^1(0,T;L_2(\Omega)),\ \ f\in C[0,T].$

Доказательство. Заметим что, так как задача (1)-(4) линейна, то ее решение можно искать в виде

$$\{u(x,t),f(t)\}=\{z(x,t),f(t)\}+\{v(x,t),0\}, \qquad (5)$$

где $v(x,t)$ - решение в Ω_T прямой задачи

$$v_t(x,t)-\Delta v_t(x,t)-\beta\Delta v(x,t)=g(x,t), \quad (x,t)\in\Omega_T, \qquad (6)$$

$$v(x,0)=\varphi(x), \quad x\in\overline{\Omega}, \qquad (7)$$

$$v\big|_{S_T}=0, \qquad (8)$$

а пара $\{z(x,t),f(t)\}$ - решение в Ω_T обратной задачи:

$$z_t(x,t)-\Delta z_t(x,t)-\beta\ \Delta z(x,t)=\ f(t)h(x,t), \quad (x,t)\in\Omega_T, \qquad (9)$$

$$z(x,0)=0, \quad x\in\overline{\Omega}, \qquad (10)$$

$$z\big|_{S_T}=0, \qquad (11)$$

$$\int\limits_{\Omega} z(x,t)w(x)dx=\widetilde{\psi}(t)\equiv\psi(t)-\int\limits_{\Omega} v(x,t)w(x)dx, \quad 0\le t\le T. \qquad (12)$$

Из теоремы о существовании и единственности решения задачи (6) - (8) следует, что для доказательства теоремы 1 достаточно доказать существование и единственность определения пары функций $\{z(x,t), f(t)\}$ из условий (9) - (12).

Поэтому, не ограничивая общности в задаче (1) - (4), положим, что $\varphi(x)=g(x,t)=0$.

Умножая обе части (9) скалярно на $w(x)$ в $L_2(\Omega)$, получим

$$(u_t-\Delta u_t-\beta\Delta u, w(x))=f(t)(h(x,t),w(x)). \qquad (13)$$

Так как

$$(u_t,w)=\frac{d}{dt}(u,w)=\psi'(t),$$
$$-(\Delta(u_t+\beta u),w)=-(u_t+\beta u,\Delta w), \qquad (14)$$

то из (1) получим

$$f(t)=\left(-\int\limits_{\Omega}(u_t+\beta u)(s,t)\Delta w(s)ds+\psi'(t)\right)\Big/ h_0(t), \qquad (15)$$

где

$$h_0(t)=\int\limits_{\Omega} h(s,t)w(s)ds.$$

Подставляя (15) в (1), получим

$$u_t-\Delta(u_t+\beta u)=A(u_t+\beta u)+\widetilde{f}(x,t) \qquad (16),$$

где

$$Av=\int\limits_{\Omega} K(x,s,t)v(s,t)ds,$$
$$K(x,s,t)=-h(x,t)\Delta w(s)/h_0(t),$$
$$\widetilde{f}(x,t)=h(x,t)\psi'(t)/h_0(t).$$

С помощью оператора Δ, уравнение (16) можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt}(I-\Delta u)-\beta\Delta u=A(u_t+\beta u)+\widetilde{f}(x,t), \qquad (17)$$

где операторы Δ и $\dfrac{d}{dt}$ коммутируют между собой. Поэтому уравнение (17) можно переписать в виде

$$(I-\Delta u)\left(\frac{du}{dt}\right)-\beta\Delta u=A(u_t+\beta u)+\widetilde{f}(x,t). \qquad (18)$$

В силу обратимости оператора $(I-\Delta)^{-1}=G$, уравнение (18) можно переписать в виде операторного уравнения

$$\frac{du}{dt}-G(\beta\Delta u)=G\big(A(u_t+\beta u)\big)+G\widetilde{f}(x,t).$$

Учитывая, что $-G(\beta\Delta u)=-\beta G(\Delta u-u+u)=\beta u-\beta Gu$, заменим последнее уравнение к эквивалентному уравнению

$$\frac{du}{dt}+\beta u=\beta Gu+G\big(A(u_t+\beta u)\big)+G\tilde{f}(x,t). \qquad (19)$$

Сделав обозначения $u_t+\beta u=\vartheta$ и вводя оператор

$$B\vartheta=\int_0^t e^{-\beta(t-\tau)}\vartheta(x,\tau)d\tau+e^{-\beta t}u_0(x),$$

из задачи (19),(2),(3) переходим к операторному уравнению

$$\vartheta=GB\vartheta+GA\vartheta+F, \qquad (20)$$

где

$$F(x,t)=G\tilde{f}+e^{-\beta t}u_0(x).$$

Докажем, что $\|GB+GA\|_{C(0,T;L_2(\Omega))}<1$. Так как

$$|A\vartheta|^2=\left|\int_\Omega K(x,s,t)\vartheta(s,t)ds\right|^2\le\int_\Omega|K(x,s,t)|^2ds\cdot\int_\Omega|\vartheta(s,t)|^2ds,$$

то

$$\|A\vartheta\|^2_{C(0,T;L_2(\Omega))}\le\|\vartheta\|_{C(0,T;L_2(\Omega))}\cdot\delta^{-2}\|h\|_{C(0,T;L_2(\Omega))}\|\Delta w\|^2_{L_2(\Omega)}.$$

Проводя аналогичную оценку для оператора *B*, получим

$$\|B\vartheta\|_{C(0,T;L_2(\Omega))}\le\|\vartheta\|_{C(0,T;L_2(\Omega))}.$$

Тогда в силу леммы 1 имеем

$$\|(GB+GA)\vartheta\|_{C(0,T;L_2(\Omega))}\le\frac{1}{2}\Big[\delta^{-2}\|h\|_{C(0,T;L_2(\Omega))}\|\Delta w\|^2_{L_2(\Omega)}+1\Big]\|\vartheta\|_{C(0,T;L_2(\Omega))}<\|\vartheta\|_{C(0,T;L_2(\Omega))},$$

т.е. $\|G\|<1$. Это условие гарантирует однозначную разрешимость операторного уравнения (19). Тогда из равенства $u_t+\beta u=\vartheta$ однозначно находим функции $u(x,t)$. Следовательно, по формуле (15) единственным образом определим функцию $f(t)$.

Докажем, что решение задачи единственно. Предположим противное. Тогда, повторяя вывод операторного уравнения (19) $\vartheta=\vartheta_1-\vartheta_2$, получаем, что ϑ удовлетворяет однородному уравнению.

В силу единственности операторного уравнения (19) получим $\vartheta=0$. Следовательно, $u=0$ и $f=0$. Теорема 1 доказана.

Список литературы / References

1. *Аблабеков Б.С.* Обратные задачи для дифференциальных уравнений третьего порядка. LAP.LAMBERT Academic Publishing, 2011. 291 с.
2. *Кабанихин С.И.* Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2009. 457с .
3. *Камынин В.Л.* Об обратной задаче определения правой части в параболическом уравнении с условием интегрального переопределения // Мат. заметки. 2005. Т. 77. Вып. 4. С. 522 - 534.
4. *Прилепко А.И., Костин А.Б.* О некоторых обратных задачах для параболических уравнений с финальным и интегральным переопределением // Мат. сб., 1992. Т. 183. № 4. С. 49 - 68.
5. *Прилепко А.И., Ткаченко Д.С.* Фредгольмовость и корректная разрешимость обратной задачи об источнике с интегральным переопределением // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2003. Том 43. № 9. 1392 – 1401.
6. *Романов В.Г.* Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984. 254 с.
7. *Сафиуллова Р.Р.* О разрешимости линейной обратной задачи нахождения правой части составного вида в гиперболическом уравнении // Вестник Южно-уральского университета. Серия: математическое моделирование и программирование, 2009. № 37 (170). С. 93-105.
8. *Павлов С.С.* Обратная задача восстановления внешнего воздействия в многомерном волновом уравнении с интегральным переопределением // Мат. заметки СВФУ, 2011. Т. 18. № 1. С. 81-93.

9. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М.:Наука, 1980. 495 с.
10. *Prilepko A.I.*, *Orlovsky D.G.*, *Vasin U.A.* Methods for solving inverse problems in mathematical fhysics. New York; Basel: Marcelker, 1999. 709 p.