ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ ДЛЯ ВЫЯВЛЕНИЯ ЭФФЕКТА АНАЛИТИЧНОСТИ

Аскар кызы Л.[1], Кененбаева Г.М.[2] Email: Askar kyzy1791@scientifictext.ru

[1]Аскар кызы Лира – старший преподаватель,
кафедра прикладной математики, информатики и информационных технологий, факультет математики и информатики,
Кыргызский национальный университет им. Ж. Баласагына;
[2]Кененбаева Гулай Мекишовна - доктор физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник,
институт теоретической и прикладной математики,
Национальная академия наук Кыргызской Республики,
г. Бишкек, Кыргызская Республика

Аннотация: *ранее авторами доказано, что линейные интегральные уравнения первого рода могут быть корректными в некоторых классах аналитических функций и выявлен эффект «аналитичности» для интегральных уравнений первого рода. Также говорится о наличии в математике «эффекта аналитичности» - задачи из различных разделов математики, которые являются некорректными в классах непрерывных и гладких функций, становятся корректными в некоторых классах аналитических функций. В данной статье численно выявлены эффекты аналитичности дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных с аналитическими данными. Приводятся результаты численных экспериментов, показывающие, что многие задачи для дифференциальных уравнений первого и второго порядка с аналитическими данными являются корректно поставленными.*
Ключевые слова: *интегральное уравнение первого рода, линейное уравнение, аналитическая функция, корректность, эффект «аналитичности», дифференциальное уравнение первого порядка в частных производных.*

NUMERICAL EXPERIMENTS TO DETERMINE THE EFFECT ANALYTICITY

Askar kyzy L.[1], Kenenbaeva G.M.[2]

[1]Askar kyzy Lira – – senior lecturer of "Applied mathematics,
INFORMATICS AND INFORMATION TECHNOLOGIES", FACULTY OF MATHEMATICS AND INFORMATICS,
KYRGYZ NATIONAL UNIVERSITY. J. BALASAGYN;
[2]Kenenbaeva Gulai Mekishovna - doctor of physico-mathematical Sciences, associate Professor, leading researcher of the INSTITUTE OF THEORETICAL AND APPLIED MATHEMATICS, NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE KYRGYZ REPUBLIC, BISHKEK, REPUBLIC OF KYRGAZSTAN

Abstract: *earlier, the authors proved that linear integral equations of the first kind might be correct in some classes of analytical functions. In this article, the effects identified numerically analytic differential equations of the first order partial derivatives with analytical data. Also in mathematics "effect of analyticity" - tasks from different branches of mathematics are incorrect in classes of continuous and smooth functions, are valid in some classes of analytic functions. This article numerically identified effects of the analyticity of differential equations first order equations with analytical data. The results of numerical experiments showing that many of the tasks for differential equations first and second order with analytical data are correctly delivered.*
Keywords: *integral equation of the first kind, linear equation, analytical function, correctness, the effect of "analytic", the differential equation of the first order partial derivatives.*

Введение

На основе анализа работ [1] - [3] с помощью методики [4] авторы сделали вывод о наличии в математике «эффекта аналитичности» - задачи из различных разделов математики, которые являются некорректными в классах непрерывных и гладких функций, становятся корректными в некоторых классах аналитических функций. В работах упомянутых авторов это были задачи из различных разделов теории дифференциальных уравнений.

Нами были рассмотрены с данной точки зрения задачи теории интегральных уравнений. Было найдено следующее необходимое условие корректности задач для линейных интегральных уравнений первого рода.

Известно, что интегральный оператор Фредгольма с непрерывным ядром на ограниченном отрезке Δ является вполне непрерывным, то есть он переводит любую ограниченную последовательность функций в сходящуюся по норме пространства $C(\Delta)$. Следовательно, задача решения линейного интегрального уравнения первого рода типа Фредгольма с заданной правой частью - непрерывной функцией - не может быть корректно поставлена. Таким образом, корректной может быть только задача решения линейного интегрального уравнения первого рода на неограниченной области Δ.

1. Применение метода сеток к дифференциальному уравнению первого порядка в частных производных с аналитическими данными

Рассматривается уравнение вида

$$u_y'(x,y)=g(u_x'(x,y), u(x,y), x, y) \quad (x\in R, y\in R_+), \qquad (1)$$

с начальным условием

$$u(x,0) = \varphi(x) \ \ (x\in \mathrm{R}), \qquad (2)$$

где $g(w, u, x, y)$, $\varphi(x)$ – аналитические по своим переменным функции, вещественные для вещественных значений аргументов.

Если эти функции – только непрерывны, то, согласно известным результатам, значения функции $u(x, y)$ определяются такими значениями функции $\varphi(x)$, что точки $(x,0)$ и (x, y) связаны направлением характеристик.

Были проведены следующие эксперименты.

Выбирается малое число $h > 0$ – шаг по y. Рассматривается явная разностная схема наиболее общего вида

$$u(x,y+ h) = L_h u(x,y), \qquad (3)$$

где L_h- некоторый разностный оператор.

Построена сетка:

$$X[j]:= x_0+jh, j \in \mathbf{Z}, \qquad (4)$$

$Y[k]:= kh$, $k\in N_0$, $\Phi[j]:= \varphi(X[j])$,

$U[j, k]$ – *приближенное значение* $u(X[j],Y[k])$.

Тогда разностная схема (с правыми разделенными разностями) имеет вид:

$$U[j,k+1]=U[j+1,k]+h\cdot g\left(\frac{U[j,k+1]-U[j,k]}{h}, U[j,k], X[j], Y[k]\right), j\in Z,\ k\in N \ ,(5)$$

с начальными условиями

$$U[j,0]= \Phi[j], \ j \in \mathbf{Z}\ . \qquad (6)$$

Для приближенного вычисления $u(x_e,y_e)$ по заданным функциям $\varphi(x)$, $g(w, u, x, y)$, числам $x_e\in\mathrm{R}$, $y_e> 0$ и количеству шагов n построен следующий

АЛГОРИТМ 1. Объявляются массивы

$X[j],Y[j]), U_{old}[j], U_{new}[j], j = 0.. n.$

А) Вычислить $h:= y_e/n$.

Б) Цикл по $k = 0.. n$

{Вычислить $X[k]:= x_e+k*h$, $Y[k]:= k*h$, $U_{old}[k]:= \varphi(X[k])$

В) Цикл по $k = 1.. n$

Цикл по $j = 0.. n–k$:

$\{U_{new}[j]:= U_{old}[j] +h*g((U_{old}[j+1] –U_{old}[j])/h, U_{old}[j], X[j],Y[k]) \}$

Г) Цикл по $j = 0.. n–k$:

$\{U_{old}[j]:= U_{new}[j]\}$

}

Д) Вывести значение $U_{old}[n]$ *(приближенно равное* $u(x_e,y_e)$*).*

Е) Конец.

ПРИМЕР 1. Расчет для квазилинейного уравнения

$u_y'(x,y)=-u(x,y)u_x'(x,y)+2x^3+2xy^2+2y$, $u(x,0) = x^2$ $(u(x, y) = x^2 + y^2)$

с $n=64$, $h=\dfrac{1}{64}$ дал результат $u(0,1) \approx 1.082$ (точное значение = 1).

ПРИМЕР 2. Расчет для существенно нелинейного уравнения

$u_y'(x,y)=-(u_x'(x,y))^2+4x^2+2y$, $u(x,0) = x^2$ $(u(x, y) = x^2 + y^2)$

с $n=32$, $h=\dfrac{1}{32}$ дал результат $u(0, 1) \approx 1.031$ (точное значение = 1).

ПРИМЕР 3. Расчет для уравнения с неполиномиальной нелинейностью

$u_y'(x,y)=-\sqrt{u_x'(x,y)} +2x^2y + \sqrt{2xy^2+1}$, $u(x,0) = x (u(x, y) = x+x^2y^2)$

с $n=32$, $h=\dfrac{1}{16}$ дал результат $u(1, 2) \approx 5.142$ (точное значение = 5).

Таким образом, во всех случаях метод сеток дал приемлемые результаты, независимо от наличия и направления характеристик.

Еще пример с известным решением:

ПРИМЕР 4. Рассмотрено уравнение

$$u_y'(x,y) + q(y)u_x'(x,y) = 0,\ \ q(y) > 0\ \ (x\in R, y\in R_+), \qquad (7)$$

с начальным условием (2), где $q(y)$ – аналитическая функция, вещественная и положительная для вещественных y.

Его точное решение

$$u(x,y) = \varphi(x - \int_0^y q(s)ds), \qquad (8)$$

то есть определяется значениями функции φ с аргументом, меньшим x.

С использованием Алгоритма 1 (с уточнением), была составлена система разностных уравнений с правыми разделенными разностями по x, то есть для приближенного вычисления $u(x,y)$ использовались значения функции φ с аргументом, большим, чем x. Для повышения точности при вычислении $U[j, k+1]$ было взято значение функции $q(y)$ в средней точке отрезка

$(X[j],Y[k]) – (X[j],Y[k+1])$.

Выведена расчетная формула

$$U[j,k+1]=L_{прав.}U:=U[j,k]–q(Y[k]+h/2)(U[j+1,k]–U[j,k])$$

$$(j\in Z, k\in N_0), \qquad (9)$$

с начальным условием (6).

Было выбрано $q(y)=1+2y$, $\varphi(x)=x^2$, тогда

$$u(x,y) = \left(x - \int_0^y (1+2s)ds \right)^2 = (x - y - y^2)^2.$$

Вычислялись значения $u(0, 1)=4$, $u(0, 2)=36$.

Были получены следующие результаты.

Таблица 1. Результаты расчета с правой разделенной разностью (значения начальной функции берутся со стороны, противоположной характеристике)

h	*1/4*	*1/8*	*1/16*	*1/32*	*1/64*
u(0, 1)≈	*2.44*	*3.21*	*3.60*	*3.80*	∞
u(0, 2)≈	*29.34*	*32.67*	*34.33*	∞	∞

Знаком ∞ обозначается переполнение.

Таким образом, имеет место сходимость, хотя и не быстрая, к точному значению.

Для сравнения был также произведен расчет по формуле

$$U[j, k+1]=L_{лев.}U := U[j, k] – q(Y[k]+h/2)(U[j, k] – U[j–1, k])$$

$(j\in Z, k \in N)$.

Студентами Кыргызско-Российской Академии Образования был также произведен расчет для других примеров.

Таблица 2. Результаты расчета с левой разделенной разностью (значения начальной функции берутся со стороны характеристики)

h	*1/4*	*1/8*	*1/16*	*1/32*	*1/64*	*1/128*
u(0, 1)≈	*3.42*	*3.71*	*3.85*	*3.93*	*3.96*	∞
u(0, 2)≈	*32.34*	*34.17*	*35.08*	∞	∞	∞

Таким образом, подтвержден и эффект аналитичности, и влияние характеристики: расчет в области, более близкой к характеристике, является более эффективным.

Список литературы / References

1. *Кененбаева Г.М.* Эффект аналитичности для дифференциальных и интегральных уравнений.– Saarbrücken, Deutschland: LAP Lambert Academic Publishing, 2015. 64 с.
2. *Pankov P.S., Imanaliev T.M.* Convergence of Finite Difference Method for First-Order Partial Differential Equations with Analytical Initial Conditions // Analytical and Approximate Methods:
3. International Conference at the Kyrgyz-Russian Slavic University. Shaker Verlag, Aachen, Germany, 2003. Pp. 185-193.

4. *Панков П.С., Сабирова Х.С.* Применение метода сеток к обратной начальной задаче для уравнения теплопроводности с аналитическим начальным условием // Вестник КНУ им. Ж. Баласагына: Естественно-технические науки. Серия 3. Вып. 3. Математические науки. Информатика и информационные технологии, 2005. С. 103-106.
5. *Кененбаева Г.М.* Теория и методика поиска новых эффектов и явлений втеории возмущенных дифференциальных и разностных уравнений. Бишкек: Изд-во «Илим», 2012. 204 с.
6. *Манжиров А.В., Полянин А.Д.* Справочник по интегральным уравнениям: Методы решения. Москва: Изд-во «Факториал Пресс», 2000. 384 с. Раздел 4.3-1.
7. *Панков П.С., Сабирова Х.С.* Корректность обратной начальной задачи для уравнения теплопроводности с аналитическими данными // Дифференциальные уравнения в частных производных и родственные проблемы анализа и информатики: Труды международной научной конференции (г. Ташкент, 16 - 19 ноября 2004). Том 1. Ташкент, 2004. С. 117-121.
8. *Кененбаева Г.М., Аскар кызы Л.* Класс интегральных уравнений первого рода, имеющих решение при любой правой части // Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики: труды Международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения академика Г.И. Марчука, Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН. Новосибирск: Абвей, 2015. С. 321-325.