Неразрушающий метод определения напряжений и оценка прочности нагруженного металлического тела

Дорогин А. Д.

Дорогин Андрей Дмитриевич - кандидат технических наук, доцент, пенсионер, г. Тюмень

Аннотация: *в рамках теоремы А. А. Ильюшина о простом нагружении предложен неразрушающий метод определения напряжений в нагруженном теле путем малого дополнительного нагружения и теоретического решения задачи. Для случая, когда не требуется знания напряженного состояния тела, предложен новый критерий прочности, позволяющий по тензору модулей деформации при малом воздействии на нагруженное тело оценить степень удаленности металла в исследуемой точке от квазижидкого состояния, когда металл перестает воспринимать статический сдвиг.*
Ключевые слова: *тензор модулей деформации, тензор упругих модулей, напряжения, относительные деформации.*

Non-destructive method of determining the stresses and evaluation prochnosti nagruzhennogo metal body

Dorogin A.

Dorogin Andrey – Ph.D., Associate Professor, pensioner, Tyumen

Abstract: *in the framework of a simple theorem A.A.Ilyushina loading proposed non-destructive method of determining stresses in the loaded body by a small additional load and the theoretical solution of the problem. For cases that do not require knowledge of a busy state of the body, we propose a new criterion of strength that allows for strain tensor modules at a low impact on the body is loaded to estimate the degree of remoteness of the metal in the test point from the quasi-liquid state when the metal is no longer perceive the static shift.*
Keywords: *strain tensor modules, tensor elastic modules, stresses, relative deformations.*

УДК 548:530.37

Из существующих неразрушающих методов определения напряженного состояния нагруженного тела наиболее высокоточный метод основан на теории акустоупругости, обобщение которой сделано в [1, 5]. Этот метод разработан для однородного плосконапряженного состояния тел [2, 34] из металлов и сплавов при напряжениях, не превышающих предела текучести. В связи с этим представляют интерес разработки неразрушающих методов определения напряжений превышающий предел текучести, так как некоторые конструкции проектируются по условию прочности исходя из временного сопротивления, например, подземные магистральные и промысловые трубопроводы. Ниже предлагается неразрушающий метод определения напряженного состояния нагруженного тела с помощью измеренных малых приращений перемещений или относительных деформаций при малом дополнительном нагружении.

1. В области малых деформаций, для тел с начальными напряжениями, на основании работы [3, 124], можно записать уравнения равновесия для возмущенных величин, которые накладываются на нагруженное состояние в виде

$$\frac{\partial \Delta\sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho * \Delta K_i = 0, \quad i, j = 1, 2, 3 \qquad (1.1)$$

где $\Delta\sigma_{ij}$ малые приращения напряжений в точке тела, вызванные воздействием возмущения массовых сил $\rho*\Delta K_i$ при их возрастании от начального состояния $\rho* K_i$ до конечного состояния $\rho* K_i + \rho*\Delta K_i$; x_j – координаты точек тела в деформированном состоянии, принятом за начальное.

Уравнения, связывающие приращения деформаций Δe_{ij} и приращения перемещений Δu_j, для рассматриваемого случая, имеют вид

$$\Delta e_{ij} = \frac{1}{2} * \left(\frac{\partial \Delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \Delta u_j}{\partial x_i}\right). \quad i, j = 1, 2, 3 \qquad (1.2)$$

Система уравнений (1.1) и (1.2) должна быть замкнута физическими уравнениями, которые можно получить следующим образом.

Пусть уравнения состояния материала могут быть представлены в виде

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}(e_{kl}) * e_{kl}, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3 \qquad (1.3)$$

здесь σ_{ij}, e_{kl} - полные значения компонент тензоров напряжений и деформаций, соответственно; C_{ijkl} - компоненты тензора преобразующего деформации в напряжения, зависят от компонент тензора деформаций.

Если предположить, что изменение каждой компоненты тензора напряжений σ_{ij} обусловлено изменением всех компонент тензора деформаций e_{kl}, то можно записать полный дифференциал из соотношения (1.3) в виде

$$\mathrm{d}\sigma_{ij} = \left(C_{ijkl} + \frac{\partial C_{ijmn}}{\partial e_{kl}} * e_{mn}\right) * \mathrm{d}e_{kl}, \quad \mathrm{m, n = 1, 2, 3} \qquad (1.4)$$

Заменяя в выражении (1.4) бесконечно малые величины $\mathrm{d}\sigma_{ij}$ и $\mathrm{d}e_{kl}$ конечными приращениями, приходим к соотношениям

$$\Delta\sigma_{ij} = \left(C_{ijkl} + \frac{\partial C_{ijmn}}{\partial e_{kl}} * e_{mn}\right) * \Delta e_{kl}, \qquad (1.5)$$

связывающими приращения компонент тензора деформаций с приращениями компонент тензора напряжений, которые можно переписать в виде

$$\Delta\sigma_{ij} = f_{ijkl} * \Delta e_{kl}, \qquad (1.6)$$

где через тензор f_{ijkl} обозначены выражения в круглых скобках системы уравнений (1.5).

Таким образом, при известных компонентах тензора f_{ijkl}, система 15 уравнений (1.1), (1.2), (1.6) достаточна для нахождения 15 неизвестных Δu_i, $\Delta\sigma_{ij}$, Δe_{ij}. Перейдём теперь к решению задачи об определении напряжений в нагруженном теле, с помощью его малого дополнительного нагружения, в рамках теоремы Ильюшина А.А. о простом нагружении [5, 125].

2. Первый путь решения заключается в экспериментальном определении приращений деформаций Δe_{ij} в исследуемой точке тела (либо приращений перемещений в окрестности точки и использовании соотношений (1.2)) при малом догружении тела и теоретическом определении приращений напряжений $\Delta\sigma_{ij}$ из уравнений равновесия. Далее, из решения системы уравнений (1.5), при известных $\Delta\sigma_{ij}$ и Δe_{ij}, могут быть найдены полные деформации e_{ij}, а по ним, из соотношений (1.3), значения полных напряжений σ_{ij}.

Этот путь решения пригоден для статически определимых конструкций, то есть для узкого круга задач механики твёрдого деформируемого тела.

3. Второй путь решения задачи заключается в измерении приращений каждой компоненты тензора деформаций Δe_{ij} (например, методами голографической интерферометрии) не менее чем в тридцати пяти точках при объёмном и в десяти точках при плоском напряжённых состояниях (другими известными методами наряду с упомянутым) в окрестности исследуемой точки. По полученному полю приращений деформаций Δe_{ij} определяются составляющие тензора f_{ijkl} в этой точке из уравнений равновесия (1.1). Это позволяет теоретически найти приращения напряжений $\Delta\sigma_{ij}$ из уравнений (1.6), а далее задача решается в соответствии с первым вариантом. Обоснуем этот способ.

При известном тензоре f_{ijkl}, и, найденном из эксперимента, тензоре приращений деформаций Δe_{ij} уравнения равновесия (1.1) должны удовлетворяться при подстановке соотношений (1.6). Следовательно, при известном из эксперимента тензоре приращений деформаций Δe_{ij} с помощью уравнений (1.1) можно было бы найти неизвестный тензор $f_{ijkl,}$ если бы их количество совпадало с числом независимых компонент этого тензора, количество которых, в общем случае, не превышает 36 [7, 200].

В связи с этим предположим, что существует три функции модулей деформации, воздействуя на которые дифференциальным оператором можно получить компоненты тензора $f_{ijkl,}$ подобно тому как через три функции напряжений могут быть выражены компоненты тензора напряжений или через три функции перемещений – компоненты тензора деформаций.

Будем считать, что введенные гипотетические функции – аналитические, то есть представимы в виде степенного ряда. В этом случае, воздействуя на эти функции оператором, транслирующим их в компоненты тензора f_{ijkl}, и подставляя полученные выражения в соотношения (1.6), а последние – в уравнения равновесия (1.1) можно было бы найти коэффициенты степенных рядов, которые аппроксимируют функции модулей деформации, приближенными методами решения дифференциальных уравнений, использующих классические функционалы гильбертова пространства. Для однородно напряжённого состояния компоненты тензора f_{ijkl} являются константами. Следовательно, связь компонент тензора f_{ijkl} с функциями модулей деформации, в силу физичности задачи, должна обеспечить постоянство этих компонент. Поэтому бесконечная система алгебраических уравнений, получаемая при решении дифференциальных уравнений упомянутыми методами, будет сводиться к конечной относительно неизвестных компонент тензора f_{ijkl} и нет необходимости знать в явной форме эту связь.

Так как заранее неизвестно является ли тело однородно напряженным, то для соблюдения выше сделанной цепочки рассуждений, нужен метод решения дифференциальных уравнений, основанный на исследовании в точке пространства, а не в его области. В связи с этим, для решения задачи предлагается способ определения коэффициентов разложения решения линейных граничных задач по степенному ряду. Его следует рассматривать как разновидность вариационного метода при функционалах Φ_i, i = 1, 2, 3, …, ∞, которые на разности

$$\sum_{(p)=0}^{m} F_p(x)\frac{\partial^{(p)}f(x)}{\partial x^p} - \varphi(x)$$

левой и правой частей основного уравнения

$$\sum_{(p)=0}^{m} F_p(x)\frac{\partial^{(p)}f(x)}{\partial x^p} = \varphi(x)$$

принимают нулевые значения:

$$\Phi_i[\sum_{(p)=0}^{m} F_p(x)\frac{\partial^{(p)}f(x)}{\partial x^p} - \varphi(x)] = 0,$$

где $x \in R^n$; $F_p(x)$ –аналитические коэффициенты; $f(x)$ – искомая функция; $\varphi(x) \neq 0$ - некоторая аналитическая функция; $p = (p_{1,\cdots,} p_n)$; $p_к$ - целые; $p_к \geq 0$; $(p) = p_1 + \cdots + p_n$; $\partial x^p = \partial x_1^{p_1} \dots \partial x_n^{p_n}$.

В качестве функционалов Φ_i предлагается взять

$$\Phi_i(\alpha) = \frac{1}{i!}\frac{\partial^{(i)}\alpha(x^0)}{\partial x^i},$$

где $(i) = i_1 + \cdots + i_n$, $i! = i_1! \cdots i_n!$, $\alpha(x^0) = \alpha(i_1^0,\cdots,i_n^0)$, $\partial x^i = \partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_n^{i_n}$,

которые при существовании решения f(x) в виде

$$f(x) = \sum_{(j)=0}^{\infty} a_j(x - x^0)^j$$

здесь $j = (j_{1,\cdots,} j_n)$, $j_к$ целые, $j_k \geq 0$, $(j) = j_1 + \cdots + j_n$, $(x - x^0)^j = (x_1 - x_1^0)^{j_1} \cdots (x_n - x_n^0)^{j_n}$) и правой части в виде

$$\varphi(x) = \sum_{(i)=0}^{\infty} \frac{1}{i!}\frac{\partial^{(i)}\varphi(x^0)}{\partial x^i}(x - x^0)^i \quad i \infty j$$

дают бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов a_j вида

$$\sum_{(j)=0}^{\infty} \frac{j!}{i!} b_{ij} a_j = \frac{1}{i!}\frac{\partial^{(i)}\varphi(x^0)}{\partial x^i}, \qquad (3.1)$$

где для i и j справедливы используемые выше обозначения.

Доказательство существования решения, полученной бесконечной системы алгебраических уравнений (3.1), приведено в работе [6, 6].

Таким образом, дифференцируя систему уравнений (1.1) одиннадцать раз по каждой переменной x_1, x_2, x_3 в соответствии со следованием производных в ряде Тейлора, то есть применяя к ним функционалы (3.1), получим систему 36 дифференциальных уравнений четвёртого порядка. Подставляя в полученную систему уравнений соотношения (1.6) и вычисляя значения приращений деформаций Δe_{ij} и их производных в исследуемой точке, приходим к системе 36 алгебраических уравнений относительно неизвестных компонент f_{ijkl}.

В виду того, что подстановка деформаций Δe_{ij} осуществляется в систему дифференциальных уравнений четвёртого порядка, то необходимо, чтобы аппроксимация каждой компоненты тензора деформаций была в виде полинома

$$\Delta e_{ij} = \sum_{k,m,n=0}^{4} a_{kmn}\, x_1^k x_2^m x_3^n, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

тела в окрестности исследуемой точки, о чём упоминалось выше.

Для плоского напряжённого состояния аналогичный полином будет иметь 10 слагаемых

$$\Delta e_{k,l} = \sum_{i,j=0}^{3} a_{i,j}\, x_1^i x_2^j, \quad k, l = 1, 2$$

и требуются измерения, как минимум, в 10 точках тела.

Полученная система алгебраических уравнений относительно неизвестных компонент тензора f_{ijkl} может иметь часть уравнений являющихся тождественным нулём, а часть – линейно зависимые. Отбрасывая нулевые тождества, а также оставляя линейно независимые уравнения из групп линейно зависимых уравнений, приходим к не доопределённой системе алгебраических уравнений. Для сведения полученной системы уравнений к нормально определённой надо часть неизвестных положить равными нулю. Здесь эту операцию выполняют не произвольно, а поступают следующим образом.

Представим связь (1.6) в виде [7, 200]

$$\Delta\sigma_K = C_{KM} * \Delta e_M \qquad K, M = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \qquad (3.2)$$

где $\Delta\sigma_K = \Delta\sigma_{ij}$, $\Delta e_M = \Delta e_{ij}$, i, j = 1, 2, 3.

Тогда по известному количеству n уравнений, то есть по возможному количеству n ненулевых элементов тензора C_{KM} устанавливают к какому классу упругой симметрии тензор С□□ может быть отнесён, например, следуя [8, 124].

Кроме того, учитывается в случае нелинейно-упругого материала, если это требуется для определения класса упругой симметрии тензора С□□, теорема взаимности Максвелла о том, что С□□ = С□□ [8, 124]. Наконец, из решения нормально определённой алгебраической системы уравнений находят ненулевые значения компонент тензора С□□, а, следовательно, и компоненты тензора □□□□□ в соотношении (1.6).

При статическом догружении тела система уравнений равновесия (1.1) является однородной. В связи с этим, в результате выше описанного алгоритма получается однородная система алгебраических уравнений, для которой очевидно нулевое решение относительно компонент тензора С□□, что физически не верно. Для того, чтобы найти нетривиальное решение, надо экспериментально определить любую из компонент C_{11}, C_{22}, C_{33} тензора C_{KM}, например методами акустоупругости, а остальные компоненты тензора C_{KM} могут быть найдены расчётом, так как система алгебраических уравнений становится неоднородной.

Для иллюстрации работоспособности предлагаемого метода определения констант тензора f_{ijkl} приведём численный пример.

4. Предположим, что тело догружается массовыми силами, перпендикулярными оси координат x_3. Дополнительные деформации тела происходят в линейно-упругой области работы материала. Материал тела – изотропный, имеющий модуль Юнга Е = $2{*}10^{11}$н/м^2 и коэффициент Пуассона μ = 0.3, то есть имеем компоненты тензора C_{KM}: $C_{11} = C_{22} = C_{33}$ = 2.19780*10^{11}н/м^2; $C_{12} = C_{21} = C_{13} = C_{23} = C_{31} = C_{32}$ = 0.65934*10^{11}н/м^2; C_{66} = 0.76923*10^{11}н/м^2, а остальные равны нулю.

На поверхности тела свободной от поверхностных нагрузок и перпендикулярной оси x_3 в окрестности исследуемой точки с координатами $x_1 = x_2 = 1$см измерены составляющие тензора приращений деформаций Δe_{11}, Δe_{22}, Δe_{12} (таблица 1) в десяти точках, включая саму исследуемую точку.

Таблица 1. Координаты точек и измеренные приращения деформаций в них

Номера точек	Координата точки x_1, см	Координата x_2, см	Приращение деформации, $\Delta e_{11} * 10^{-5}$	Приращение деформации, $\Delta e_{22} * 10^{-5}$	Приращение деформации, $\Delta e_{12} * 10^{-5}$
1	1.0	0.0	-2.20	2.20	0.00
2	2.0	0.0	-8.80	8.80	0.00
3	0.0	1.0	-2.20	-0.25	-6.50
4	1.0	1.0	0.60	0.45	-6.50
5	2.0	1.0	-1.00	5.55	-6.50
6	0.0	2.0	-8.80	-1.00	-26.00
7	1.0	2.0	-1.00	-1.80	-26.00
8	2.0	2.0	2.40	1.80	-26.00
9	0.5	0.5	0.15	0.11	-1.62
10	1.5	1.5	1.35	1.01	-14.60

При введенном условии нагружения ясно, что имеем случай плосконапряженного возмущенного состояния, то есть $\Delta\sigma_{33} = \Delta\sigma_{23} = \Delta\sigma_{13} = 0$. Кроме того, примем $\Delta e_{33} = \Delta e_{23} = \Delta e_{13} = 0$. Измеренные деформации аппроксимируются полиномами:

$$\Delta e_{11} = -2.2{*}10^{-5}x_1^2 + 5.0{*}10^{-5}x_1{*}x_2 - 2.2{*}10^{-5}x_2^2,$$
$$\Delta e_{22} = 2.2{*}10^{-5}x_1^2 - 1.5{*}10^{-5}x_1{*}x_2 - 2.5{*}10^{-6}x_2^2, \qquad (4.1)$$
$$\Delta e_{12} = -6.5{*}10^{-5}x_2^2,$$

удовлетворяющими условию совместности деформаций. Этим деформациям, при линейно-упругом материале, соответствуют напряжения

$$\Delta\sigma_{11} = -33.846x_1^2 + 100.000x_1{*}x_2 - 50.000x_2^2,$$
$$\Delta\sigma_{22} = 33.846x_1^2 - 20.000x_2^2, \qquad (4.2)$$
$$\Delta\sigma_{12} = -50.000x_2^2,$$

которые удовлетворяют уравнениям равновесия

$$\frac{\partial\Delta\sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho{*}\Delta K_i = 0, \quad i, j = 1, 2,$$

где $\rho{*}\Delta K_1 = -67.692x_1$, $\rho{*}\Delta K_2 = -40.000x_2$; единицы измерения коэффициентов в (4.2) кг/см^2.

Таким образом, приведенные величины приращений деформаций и напряжений удовлетворяют уравнениям равновесия и условиям совместности деформаций, то есть условиям реального эксперимента. Перейдём теперь к рассмотрению предлагаемого способа определения компонент тензора C_{KM} в точке с координатами $x_1 = x_2 = 1$ см с помощью измеренных деформаций (4.1).

Связь (3.2) между приращениями компонент тензора деформаций и приращениями компонент тензора напряжений, с учётом того, что $\Delta\sigma_{33} = \Delta\sigma_{23} = \Delta\sigma_{13} = \Delta e_{33} = \Delta e_{23} = \Delta e_{13} = 0$, примет вид:

$$\Delta\sigma_1 = C_{11}\,\Delta e_1 + C_{12}\,\Delta e_2 + C_{16}\,\Delta e_6,$$
$$\Delta\sigma_2 = C_{21}\,\Delta e_1 + C_{22}\,\Delta e_2 + C_{26}\,\Delta e_6,$$
$$\Delta\sigma_6 = C_{61}\,\Delta e_1 + C_{62}\,\Delta e_2 + C_{66}\,\Delta e_6.$$

Выполняя последовательно все операции выше описанного алгоритма, приходим к системе четырёх алгебраических уравнений

$$0.6\,C_{11} + 2.9\,C_{12} - 13.0\,C_{66} = -67.692*10^5,$$
$$0.6\,C_{21} - 2.0\,C_{22} = -40.000*10^5,$$
$$-4.4\,C_{11} + 4.4\,C_{12} = -67.692*10^5,$$
$$5.0\,C_{21} - 1.5\,C_{22} = 0,$$

из которой находим, что $C_{12} = C_{21} = 6.59341*10^{10}$ н/м^2; $C_{11} = C_{22} = 2.19780*10^{11}$ н/м^2; $C_{66} = 7.69228*10^{10}$ н/м^2, то есть совпадают с исходной посылкой о значении этих констант.

5. Предложенный последний способ определения напряжений в нагруженном теле является более общим, тем не менее и он имеет ограничения. Во-первых, для пластически деформируемых материалов использована теорема А.А. Ильюшина о простом нагружении, и поэтому необходимо знание истории нагружения материала; во-вторых, надо знать нелинейную связь компонент тензора напряжений с компонентами тензора деформаций, установление которой для нагруженного тела не всегда возможно. В связи этим желательно снять эти ограничения метода. Один из путей можно предложить из следующих соображений.

Метод ориентирован на определение напряженного состояния нагруженного тела, чтобы ответить на вопрос об удовлетворении этого состояния тому или иному критерию прочности, основанному на исследовании напряженного состояния и сравнении его с

допускаемым эквивалентным напряжением, устанавливаемым с помощью простых экспериментов. Поэтому, если ввести новый критерий прочности не требующий определения напряженного состояния, то возможно снять вышеуказанные ограничения.

Таким критерием может служить состояние металла в точке в квазижидком состоянии, то есть состоянии, когда металл перестает воспринимать статический. Причём этот критерий может быть определен по тензору модулей деформации металла в естественном состоянии.

В работах [9, 10, 11,12] показано, что величина

$$C = \sqrt{\frac{1}{n} * \frac{1}{\rho} * \sum_{K=1}^{6} \sum_{M=1}^{6} C_{KM}^{o}} = v,$$

где n - количество ненулевых элементов тензора модулей деформации C_{KM}^{o} для металла в естественном состоянии; ρ - плотность металла; v – скорость звука в расплаве металла при температуре плавления,

близка к скорости распространения упругих волн в расплаве металла при температуре плавления. На основании этого может быть введён критерий прочности, в качестве которого принимается переход металла в точке в квазижидкое состояние. Иными словами, металл становится не способным воспринимать статический сдвиг, то есть остается только шаровая часть тензора напряжений. Следовательно, в тензоре модулей деформации C_{KM} ненулевыми останутся компоненты $C_1 = C_2 = C_3$, которые равны объемному модулю сжатия. Этот модуль, как известно, для жидкости может быть определён при изоэнтропийном процессе, как произведение квадрата скорости звука на плотность жидкости. Таким образом, получаем критерий прочности в виде

$$3*v^2*\rho = \frac{3}{n}*\sum_{K=1}^{6} \sum_{M=1}^{6} C_{KM}^{o} < \sum_{K=1}^{6} \sum_{M=1}^{6} C_{KM}, \quad (5.1)$$

где входящие параметры определены выше.

Введенный критерий прочности (5.1) позволяет снять ограничения метода, упомянутые выше. Это возможно благодаря тому, что теперь требуется установить удаленность напряженного состояния металла в точке от квазижидкого состояния, а не уровень напряжений. Первое из этих состояний (правая часть неравенства (5.1)) определяется с помощью тензора модулей деформации C_{KM} в точке при малом воздействии на нагруженное тело, а второе – либо на основании известного тензора упругих модулей металла C_{KM}^{o} в естественном состоянии, либо по известным плотности металла и скорости распространения звука в металле в естественном состоянии (левая часть неравенства (5.1)).

Список литературы / References

1. *Гузь А. Н.* Упругие волны в телах с начальными напряжениями. Т. 1. Киев: Наукова думка, 1986. 374 с.

2. *Гузь А. Н.* Упругие волны в телах с начальными напряжениями. Т. 2. Киев: Наукова думка, 1986. 536 с.
3. *Лурье А. И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.
4. *Прагер В.* Введение в механику сплошных сред. М., 1963. 311 с.
5. *Безухов Н. И.* Основы теории упругости, пластичности и ползучести. М., 1968. 512 с.
6. *Дорогин А. Д.* Метод решения линейных граничных задач. // Проблемы современной науки и образования, 2015. № 2 [32]. С. 5-8.
7. *Мейз Д.* Теория и задачи механики сплошных сред. М., 1974. 536 с.
8. *Дьелесан Э., Руайе Д.* Упругие волны в твердых телах. М., 1982. 424 с.
9. *Дорогин А. Д.* Метод определения напряжений в действующем трубопроводе. // Информационный сборник. Научно-технические достижения и передовой опыт, рекомендуемые для внедрения в нефтяной промышленности, 1991. Выпуск 9. С. 34-39.
10. *Дорогин А. Д.* О связи скорости распространения звуковых волн в расплаве с тензором упругих модулей металла при комнатной температуре. // Известия академии наук Союза ССР. Физика твердого тела, 1990. № 9. Том 32. С. 2816-2818.
11. *Дорогин А. Д.* К энергии движущихся тел. // Проблемы современной науки и образования, 2014. № 12 [30]. С. 35-38.
12. *Дорогин А. Д.* К вопросу энергии движущихся тел. // Проблемы современной науки и образования, 2016. № 4 [46]. С. 23-27.