РЕШЕНИЕ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ТЕЛЕГРАФНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕНННЫХ

Дудко В.Г.[1], Сумительнов В.Н.[2], Шлопак А.А.[3] Email: Dudko17115@scientifictext.ru

[1]Дудко Владимир Григорьевич - кандидат технических наук, доцент;
[2]Сумительнов Виктор Николаевич - кандидат технических наук, доцент;
[3]Шлопак Александр Анфирович - кандидат технических наук, доцент,
кафедра систем автоматического управления,
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана
Национальный исследовательский университет,
Мытищинский филиал,
г. Мытищи

Аннотация: *обоснование метода решения смешанной задачи для системы телеграфных уравнений можно получить из общих теорем работы [3]. В настоящей статье рассматривается сведение поставленной смешанной задачи к смешанной задаче при простейших граничных условиях путем введения новых функций и решение последней обычным и видоизмененным методами разделения переменных. Показана тождественность полученных результатов при решении как одним, так и другим методом. Доказана теорема, подтверждающая правомерность использования видоизмененного метода.*
Ключевые слова: *уравнения, телеграфные, метод.*

THE SOLUTION OF ONE MIXED TASK FOR THE SYSTEM OF THE TELEGRAPH EQUATIONS BY METHOD OF DIVISION OF VARIABLES

Dudko V.G.[1], Sumitelnov V.N.[2], Shlopak A.A.[3]

[1]Dudko Vladimir Grigoryevich - PhD in Engineering Sciences, Associate Professor;
[2]Sumitelnov Victor Nikolaevich - PhD in Engineering Sciences, Associate Professor;
[3]Shlopak Alexander Anfirovich – PhD in Engineering Sciences, Associate Professor,
DEPARTMENT OF SYSTEMS OF AUTOMATIC CONTROL,
BAUMAN MOSCOW STATE TECHNICAL UNIVERSITY,
NATIONAL RESEARCH UNIVERSITY,
MYTISHCHI BRANCH,
MYTISHCHI

Abstract: *justification of a method of the solution of the mixed task for the system of the telegraph equations it is possible to obtain from the general theorems in article [3]. In the present article convergence of the set mixed task to the mixed task in case of the elementary boundary conditions by introduction of new functions is considered and the decision of the mixed task by usual method of division of variable and modified one. The identity of the received results in case of the decision is shown, by both one, and other method. The theorem confirming legitimacy of use of a modified method is proved.*
Keywords: *equations, method, telegraph.*

УДК 681.51

Постановка задачи следующая:

Рассмотрим систему телеграфных уравнений в векторно-матричной форме:

$$-\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = R\mathbf{i} + L\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t}, \qquad (1)$$

$$-\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial x} = G\mathbf{u} + C\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$$

при граничных условиях ($x \in [0,l], t \in [0,T]; l \in [0,\infty), T \in [0,\infty)$,

$$\mathbf{i}\big|_{x=0} = 0, \quad \mathbf{u}\big|_{x=l} = \alpha\,\mathbf{i}\big|_{x=l} \qquad (2)$$

и начальных условиях $(t \in [0,T])$

$$\mathbf{i}\big|_{t=0} = -\frac{\mathbf{F}(x)}{\beta}, \; x \in [0,l] \qquad (3)$$

Здесь коэффициенты L,R,C,G - постоянные квадратные матрицы размерности $m\geq 1,$ причем матрицы L,C симметричны и положительно определены. Векторы $\mathbf{i}(x,t)$ и $\mathbf{u}(x,t)$ размерности m. Для более наглядного дальнейшего изложения будем рассматривать скалярные искомые функции $i(x,t)$ и $u(x,t)$ независимых переменных x и $t,$ являющиеся соответственно силой тока и напряжением; l - длина провода. L,R,C,G - будем считать положительные постоянные вещественные числа, выражающие соответственно сопротивление, самоиндукцию, утечку и емкость (в расчете на единицу длины провода).

Граничные условия (2) означают, что левый конец $(x=0)$ провода открыт, а на правом конце $(x=l)$ включено омическое сопротивление $\alpha.$ При этом будем считать $\alpha\in(\beta,\infty)$, где $\beta=\sqrt{\dfrac{L}{C}},$ $F(x)$ и $\theta(x)$ - известные непрерывно дифференцируемые на отрезке $x\in[0,l]$ функции, имеющие на нем кусочно-непрерывные вторые производные, причем

$$F(0)=F(l)=\theta(l)=0\ ,$$

$$F^{'}(0)=\theta^{'}(0)=\theta^{'}(l)=0\ .$$

Мы будем рассматривать случай, когда выполнено условие

$$\frac{R}{L}=\frac{G}{C}=\mu. \qquad (4)$$

Рассмотрим построение решения обычным методом разделения переменных. Положим

$$i(x,t)=Ie^{-\mu t},u(x,t)=Ue^{-\mu t}, \qquad (5)$$

где $I=I(x,t),U=U(x,t)$ - новые искомые функции. Тогда система уравнений (1), граничные (2) и начальные (3) условия примут вид:

$$-\frac{\partial U}{\partial x}=L\frac{\partial I}{\partial t}, \qquad (6)$$

$$-\frac{\partial I}{\partial x}=C\frac{\partial U}{\partial t}$$

$$I\big|_{x=0}=0,\quad U\big|_{x=l}=\alpha I_{x=l} \qquad (7)$$

$$I\big|_{t=0}=-\frac{F(x)}{\beta},\quad U\big|_{t=0}=\theta(x) \qquad (8)$$

Далее положим

$$I=-\frac{e^{-\nu\tau}}{\beta}(zsh\sigma x-rch\sigma x), \qquad (9)$$

$$U=e^{-\nu\tau}(zch\sigma x-rch\sigma x),$$

где

$$\alpha=\frac{1}{\sqrt{LC}}\ ,\ \sigma=\frac{1}{2l}\ln\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\ ,\ r=\alpha\sigma \qquad (10)$$

$z=z(x,t)$ и $r=r(x,t)$ - новые искомые функции.

Теперь подставим значения I и U из (9) соответственно в (6), (7) и (8). После элементарных преобразований система уравнений (6) примет вид:

$$(\alpha\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial r}{\partial t})ch\sigma x-(\alpha\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial t})sh\sigma x=0\ ,$$

$$(\alpha\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial t})ch\sigma x-(\alpha\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial r}{\partial t})sh\sigma x=0$$

Или

$$-\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial r}{\partial t}, \qquad (11)$$

$$-\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial z}{\partial t}.$$

Граничные условия (7) перейдут в граничные условия:

$$r\big|_{x=0}=0,[(\beta ch\sigma x+\alpha sh\sigma x)z]\,|_{x=l}=[(\beta ch\sigma x+\alpha sh\sigma x)r]\,|_{x=l}$$

или, принимая во внимание, что в силу (10)

$$\beta ch\sigma l+\alpha sh\sigma l=0,\quad \beta sh\sigma l+\alpha ch\sigma l\neq 0, \qquad (12)$$

$$r\big|_{x=0}=r\big|_{x=l}=0,$$

Начальные условия (8) перейдут в начальные условия:

$$F(x)=z\,|_{t=0}\, sh\sigma x-r\,|_{t=0}\, ch\sigma x,$$

$$\theta(x)=z\,|_{t=0}\, ch\sigma x-r\,|_{t=0}\, sh\sigma x$$

откуда получим:

$$z\,|_{t=0}=f(x), \qquad (13)$$

$$r\,|_{t=0}=\varphi(x),$$

Где $f(x)$ и $\varphi(x)$ определяются по формулам:

$$f(x)=ch\sigma x\theta(x)-sh\sigma xF(x), \qquad (14)$$

$$\varphi(x)=sh\sigma x\theta(x)-ch\sigma xF(x).$$

Таким образом, задача сведена к нахождению решения системы уравнений (11), удовлетворяющего граничным (12) и начальным (13) условиям. Эта задача легко решается обычным методом разделения переменных.

В соответствии с граничными условиями (12) решение системы уравнений (11) будем искать в виде:

$$z(x,t)=\frac{T_0(t)}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)\cos\frac{k\pi}{l}x,\ r(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}S_k(t)\sin\frac{k\pi}{l}x, \qquad (15)$$

Где $T_k(t)$ и $S_k(t)$ функции только аргумента t.

На основании системы уравнений (11) получим:

$$T_k'+\frac{\alpha k\pi}{l}S_k=0,\ (k=0,1,2,...) \qquad (16)$$

$$S_k'-\frac{\alpha k\pi}{l}T_k=0$$

откуда найдем:

$$T_k(t)=a_k\cos\frac{\alpha k\pi}{l}t-b_k\sin\frac{\alpha k\pi}{l}t, \qquad (17)$$

$$S_k(t)=a_k\sin\frac{\alpha k\pi}{l}t+b_k\cos\frac{\alpha k\pi}{l}t$$

Где a_k и b_k $(k=1,2,...)$ - произвольные постоянные.

Кроме того, из (11) следует, что

$$T_0(t)\equiv a_0, \qquad (18)$$

где a_0 - произвольная постоянная.

Решение, определяемое по формулам (15), (17) и (18), удовлетворяет системе уравнений (11) и граничным условиям (12). Теперь необходимо удовлетворить начальным условиям. При $t=0$ в силу (3), (15), (17), (18) будем иметь:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\frac{k\pi}{l}x,\ \varphi(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin\frac{k\pi}{l}x, \qquad (19)$$

откуда получим:

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{k\pi}{l}xdx,\ b_k=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\cos\frac{k\pi}{l}xdx, \qquad (20)$$

Где $f(x)$ и $\varphi(x)$ определяются по формулам (14).

Решение, определяемое формулами (15), (17), (18), (20), (14), удовлетворяет системе уравнений (11), граничным (12) и начальным (13) условиям. Учитывая (9), (5), получим решение поставленной задачи:

$$i(x,t) = -\frac{e^{-\lambda t}}{\beta}\{\frac{a_0}{2} sh\sigma x + \sum_{k=1}^{\infty}[(a_k \cos\frac{\alpha k\pi}{l}t - b_k \sin\frac{\alpha k\pi}{l}t)sh\sigma x \cos\frac{k\pi}{l}x -$$

$$-(b_k \cos\frac{\alpha k\pi}{l}t + a_k \sin\frac{\alpha k\pi}{l}t)ch\sigma x \cos\frac{k\pi}{l}x]\}, \qquad (21)$$

$$u(x,t) = e^{-\lambda t}[\frac{a_0}{2} ch\sigma x + \sum_{k=1}^{\infty}[(a_k \cos\frac{\alpha k\pi}{l}t - b_k \sin\frac{\alpha k\pi}{l}t)ch\sigma x \cos\frac{k\pi}{l}x -$$

$$-(a_k \sin\frac{\alpha k\pi}{l}t + b_k \cos\frac{\alpha k\pi}{l}t)sh\sigma x \sin\frac{k\pi}{l}x],$$

Где $\lambda = \mu + \nu$.

Теперь решим поставленную задачу, пользуясь видоизмененным методом разделения переменных. Решение системы уравнений (6) мы будем строить в виде:

$$I(x,t) = -\frac{1}{2\beta}\sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{\alpha p_k t} shp_k x, \qquad (22)$$

$$U(x,t) = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{\alpha p_k t} chp_k x$$

Где $\alpha = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $p_k = \sigma + \tau_k\sqrt{-1}$ (σ, τ_k - вещественные числа) – корни трансцендентного уравнения

$$\beta chpl + \alpha shpl = 0; \qquad (23)$$

$A_k = a_k + b_k\sqrt{-1}$ (a_k и b_k - вещественные числа) – произвольные комплексные числа, причем $A_k = \overline{A}_{-k}$ $(\overline{A_{-k}} = a_{-k} - b_{-k}\sqrt{-1})$.

Корни уравнения (23) легко находятся. Из (23) имеем:

$$(\alpha+\beta)e^{pl} + (\beta-\alpha)e^{-pl} = 0,$$

Откуда

$$e^{2pl} = \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta},$$

или, отделяя вещественные и мнимые части,

$$e^{2\sigma l}\cos 2\tau l = \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}, \sin 2\tau l = 0.$$

Поэтому корнями уравнений (23) будут

$$p_k = \sigma + \tau_k\sqrt{-1} = \frac{1}{2l}\ln\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta} + \frac{k\pi}{l}\sqrt{-1}. \qquad (24)$$

Заметим, что из (24) следует $p_k = \overline{p}_{-k}$ $(\overline{p}_{-k} = \sigma - \tau_{-k}\sqrt{-1})$.

Непосредственной подстановкой убеждаемся в том, что решение, определяемое по формулам (22), (24), удовлетворяет системе уравнений (6) и граничным условиям (7). Найдем теперь коэффициенты A_k с тем, чтобы удовлетворить начальным условиям (8). Из (8) и (22) при $t = 0$ будем иметь:

$$2F(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k shp_k x,$$

$$2\theta(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k chp_k x$$

или

$$2F(x) = a_0 sh\sigma x + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k shp_k x + \overline{A}_k sh\overline{p}_k x),$$

$$2\theta(x) = a_0 ch\sigma x + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k chp_k x + \overline{A}_k ch\overline{p}_k x),$$

откуда, принимая во внимание

$$A_k shp_k x + \overline{A}_k sh\overline{p}_k x = 2(a_k sh\sigma x \cos\tau_k x - b_k ch\sigma x \sin\tau_k x),$$

$$A_k chp_k x + \overline{A}_k ch\overline{p}_k x = 2(a_k ch\sigma x \cos\tau_k x - b_k sh\sigma x \sin\tau_k x),$$

получим:

$$F(x) = sh\sigma x f(x) - ch\sigma x \varphi(x), \qquad (25)$$

$$\theta(x) = ch\sigma x f(x) - sh\sigma x \varphi(x),$$

где $f(x)$ и $\varphi(x)$ означают то же самое, что и в (19). Из (25) мы найдем, что $f(x)$ и $\varphi(x)$ определяются по формулам (14).

Теперь ясно, что коэффициенты $A_k = a_k + b_k\sqrt{-1}$ определяются по формулам (20), имея в виду, что для нахождения коэффициентов A_k в (22) достаточно знать A_k при $k = 0,1,...$

Таким образом, нашли коэффициенты A_k такими, что удовлетворились начальные условия (8) и тем самым построили видоизмененным методом разделения переменных решение системы уравнений (6), удовлетворяющее граничным (7) и начальным (8) условиям.

Учитывая (5), мы получим решение поставленной задачи в окончательном виде:

$$i(x,t) = -\frac{e^{-\mu t}}{2\beta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{\alpha p_k t} shp_k x, \qquad (26)$$

$$u(x,t) = \frac{e^{-\mu t}}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{\alpha p_k t} chp_k x.$$

Решение (26) совпадает с решением (21), полученным обычным методом разделения переменных. Отметим, что аналогично можно построить решение и в случае, когда $\alpha \in [0,\beta)$.

Теперь докажем законность произведенных выкладок. Следует отметить, что обоснование решения обычным разделением переменных можно получить из общих теорем работы [3]. Однако, для видоизмененного метода разделения переменных можно непосредственно доказать теорему, утверждающую законность произведенных рассуждений.

Теорема

Пусть начальные функции $F(x)$ и $\theta(x)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $x \in [0,l]$ и имеют на нем кусочно-непрерывные производные второго порядка, причем

$$F(0) = F(l) = \theta(l) = 0,$$

$$F'(0) = \theta'(0) = \theta'(l) = 0.$$

Тогда функции $i, u,$ определяемые по формулам (21), (26), непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют в области $x \in [0,l]$, $t \in [0,T]$ системе уравнений (1), граничным (2) и начальным (3) условиям.

Доказательство

С помощью непосредственно проведенных оценок убеждаемся в том, что ряды

$$M\sum_{k=0}^{\infty}(|a_k| + |b_k|) \text{ и } \quad N\sum_{k=0}^{\infty}[|a_k| + |b_k| + k(|a_k| + |b_k|)], \qquad (27)$$

Где M и N - достаточно большие положительные постоянные, независящие от $k,$ являются соответственно мажорантными для рядов (21) и для рядов, полученных дифференцированием рядов (21) по x и $t.$

Далее, продолжим функцию $f(x)$ вне отрезка $x \in [0,l]$ четным образом, а функцию $\varphi(x)$ - нечетным. Тогда, в силу (14) и условий теоремы таким образом продолженные функции $f(x)$ и $\varphi(x)$

будут периодическими с периодом $2l$ непрерывно дифференцируемыми функциями, имеющими кусочно-непрерывные вторые производные.

В силу известного свойства рядов Фурье (например [1]), числовые ряды (27) будут сходящимися и, следовательно, ряды (21) и ряды, полученные дифференцированием их по x и t, будут равномерно сходящимися в области $x \in [0, l]$, $t \in [0, T]$.

Из равномерной сходимости рядов (21) будет следовать, что i, u непрерывно примыкают к своим граничным (2) и начальным (3) условиям, а из равномерной сходимости рядов, полученных дифференцированием рядов (21) по x и t, будет следовать, что функции i, u удовлетворяют системе уравнений (1) (так как будет возможно почленно дифференцировать по x и t ряды (21). Теорема доказана.

Список литературы / References

1. *Тихонов А.Н., Самарский А.А*. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 735 с.
2. *Мышкис А.Д.* Простейшая краевая задача для обобщенных систем телеграфных уравнений. Матем. сб. 31 (73):2 (1952). С. 335–352.