АЛЬТЕРНАТИВНЫЙ СПОСОБ ПОСТРОЕНИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА ПАСКАЛЯ И РАСЧЁТА БИНОМИНАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Филатов О.В. Email: Filatov17111@scientifictext.ru

Филатов Олег Владимирович - инженер-программист,
ЗАО «Научно технический центр «Модуль», г. Москва

Аннотация: *существуют два способа построения треугольника Паскаля. В первом способе производится суммирование по закону Паскаля двух вышележащих величин, для получения его нового, упорядоченного, члена. Во втором способе построения треугольника Паскаля его члены рассчитывают по комбинаторной формуле сочетаний. Совпадение результатов, получаемых в обоих способах построения, принимают за равноправность этих способов построения треугольника Паскаля. В данной статье показано, как используя структуру треугольника Паскаля, можно получить множество новых формул и широко известную комбинаторную формулу перестановок, по которым строится этот треугольник. Некоторые приводимые новые формулы в значительной мере расширяют границу расчётов биноминальных коэффициентов на малоразрядных процессорах, за счёт того, что в них нет операции факториала (используемую в комбинаторной формуле сочетаний). В статье обращается внимание на ряд формальных признаков, проявляющихся при разных способах построения треугольника Паскаля, эти признаки позволяют ставить вопрос о том, что получаемые сущности - разные объекты, область совпадения которых называют треугольником Паскаля.*
Ключевые слова: *закон Паскаля, треугольник Паскаля, комбинаторный треугольник, прямоугольный треугольник Паскаля, равнобедренный треугольника Паскаля, биноминальный коэффициент.*

AN ALTERNATIVE WAY TO BUILD A PASCAL TRIANGLE AND CALCULATE BINOMIAL COEFFICIENTS

Filatov O.V.

Filatov Oleg Vladimirovich - Software Engineer,
SCIENTIFIC AND TECHNICAL CENTER «МОДУЛЬ», MOSCOW

Abstract: *there are two ways to construct a Pascal triangle. In the first method, summation is carried out according to Pascal's law of two higher-lying quantities, in order to obtain its new, ordered, member. In the second method of constructing the Pascal triangle, its terms are calculated from the combinatorial combination formula. The coincidence of the results obtained in both methods of construction is taken as the equal rights of these methods of constructing the Pascal triangle. This article shows how using the structure of the Pascal triangle, one can get many new formulas, and the well-known combinatorial permutation formula on which this triangle is constructed. Some of the new formulas that are introduced greatly extend the boundary of the calculation of binomial coefficients on small-scale processors, because there is no factorial operation in them (used in the combinatorial combination formula). The article draws attention to a number of formal features that appear in different ways of constructing the Pascal triangle, these signs allow us to raise the question that the received entities are different objects whose domain of coincidence is called the Pascal triangle.*
Keywords: *Pascal's law, Pascal's triangle, combinatorial triangle, rectangular Pascal triangle, isosceles triangle of Pascal, binomial coefficient.*

УДК: «51»

Введение

Рассмотрим способ построения треугольника Паскаля по закону Паскаля [1], таблица 1. «… для такой таблицы будет выполняться *закон Паскаля*, заключающийся в том, что каждое число является суммой двух ближайших к нему чисел предыдущей строки. Представим себе теперь, что в начальной строке этой таблицы один из нулей заменился на единицу. Если мы потребуем, чтобы закон Паскаля сохранялся, то «возмущение» будет «распространяться углом», подобно волнам от воткнутой в ручей палки – в виде треугольника Паскаля: …» (таблица 1).

Таблица 1. Вершинная часть треугольника Паскаля при суммировании

Длина ряда l	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$l = 1$		0		0		0		**0**		**1**		**0**		0		0		0	
$l = 2$	0		0		0		**0**		**1**		**1**		**0**		0		0		0

l = 3		0		0		**0**		**1**		**2**		**1**		**0**		0		0	
l = 4	0		0		**0**		**1**		**3**		**3**		**1**		**0**		0		0
l = 5		0		**0**		**1**		**4**		**6**		**4**		**1**		**0**		0	
l = 6	0		**0**		**1**		**5**		**10**		**10**		**5**		**1**		**0**		0
l = 7		**0**		**1**		**6**		**15**		**20**		**15**		**6**		**1**		**0**	
l = 8	**0**		**1**		**7**		**21**		**35**		**35**		**21**		**7**		**1**		**0**
l = 9		**1**		**8**		**28**		**56**		**70**		**56**		**28**		**8**		**1**	
$X_{нечет}$	-9		-7		-5		-3		-1		1		3		5		7		9
$X_{чёт}$		- 8		- 6		- 4		-2		0		2		4		6		8	
$C_3(x_{n+1}(l+1)) = C_1(x_n(l)) + C_2(x_{n+2}(l))$																			

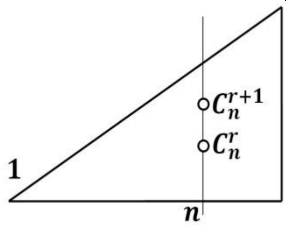
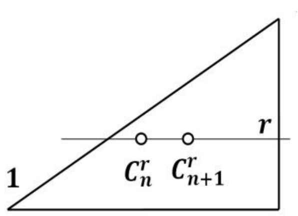
В таблице 1 присутствуют нули. Отсутствие нулей нарушает закон Паскаля (двух слагаемых) [1] для получения единиц на боках треугольника. Для сохранения правила получения членов ряда $l+1$ из суммы членов ряда l, треугольник Паскаля в таблице 1 окружён нулями. И только после появления вершинной единицы происходит расщепление оси X на две под оси: $X_{\text{чёт}}$; $X_{\text{нечет}}$ (таблица 1).

Комбинаторный способ построения треугольника Паскаля. Этот способ построения треугольника не использует ранее рассчитанные значения, а задействует только координаты искомого значения C_k^n: n - номер строки, k - позиционный номер в строке (таблица 2, ячейка 2). Из этих двух координат получают число: $C_k^n = \binom{n}{k}$. Связь l – нумерации и k - нумерации (таблица 3) дана в ф.1.1:

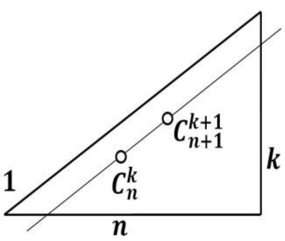
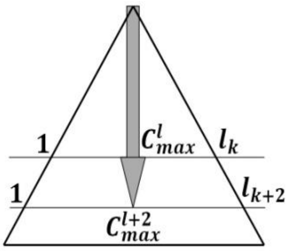
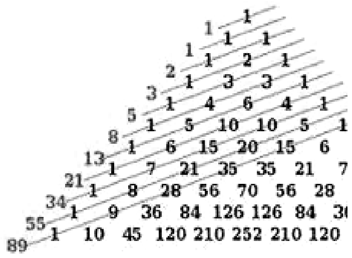
$$\binom{n}{k} = \frac{n\,!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{(l-1)\,!}{k! \cdot (l-1-k)!}; \quad n \geq k \geq 0 \qquad \text{Ф.1.1}$$

В таблице 2 даны разные способы построения треугольника Паскаля.

Таблица 2. Способы расчёта C_n^k (построения треугольника Паскаля)

1. Способ Паскаля	2. Комбинаторный	3. По столбцам ПТП	4. По рядам ПТП
0 0 0 0 0			
0 0 **1** 0 **0**			
0 **1** 0 **1** 0			
1 0 **2** 0 **1**	**1** **2** **1**		
0 0 0 0 0			
0 0 0 0 0	**4** **6** **4**		
$H_{n+1}^k = \frac{H_n^{k-1} + H_n^k}{2}$	$T_n^k = \binom{n}{k}$	$C_n^R = \prod_{r=1}^{R-1} \frac{n-r+1}{r}$	$C_N^R = \prod_{n=R-1}^{N-1} \frac{n+1}{n-R+2}$
смотри [1]	смотри [1]	Ф.2.1.1	Ф.3.1.1

5. По линиям ПТП	6. По оси симметрии	7. Диагонали Фибоначчи

		
$C_N^K = \prod_{\substack{n=N-K\\k=0}}^{\substack{n=N-1\\k=K-1}} \frac{n+1}{k+1}$	$C_L^{\frac{L+1}{2}} = \prod_{l=1}^{L-2} \frac{4\cdot l}{l+1}$ $l = 2\cdot n + 1$; где: n=0;1;2; ..	$\frac{C_{n-1}^{k+1}}{C_n^k} = \frac{d(d-1)}{nk+n}$; где: $d = n - k$
Ф.3.2.1	Ф.4.2	Ф.5.1
ПТП - прямоугольный треугольник Паскаля		

Основная часть

Рассмотрим прямоугольный треугольник Паскаля в таблице 3, рассчитанный по ф.1.1. Его столбцы n являются рядами l таблицы 1.

Таблица 3. Прямоугольный треугольник Паскаля (ПТП)

k = 12													1	r = 13
k = 11												1	12	r = 12
k = 10											1	11	66	r = 11
k = 9										1	10	55	220	r = 10
k = 8									1	9	45	165	495	r = 9
k = 7								1	8	36	120	330	792	r = 8
k = 6							1	7	28	84	210	462	924	r = 7
k = 5						1	6	21	56	126	252	462	792	r = 6
k = 4					1	5	15	35	70	126	210	330	495	r = 5
k = 3				1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	r = 4
k = 2			1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	r = 3
k = 1		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	r = 2
k = 0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	r = 1
$n =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\leftarrow n$
$l =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	$\leftarrow l$

Прямоугольный треугольник Паскаля - способ построения по столбцам.

Проведём альтернативный вывод формулы сочетаний ф.1.1. Для этого получим отношение коэффициента $C_{n=Const}^{r+1}$ из столбца n (ряд $r+1$) к прилегающему снизу коэффициенту $C_{n=Const}^{r}$ из ряда r (таблица 3), ф.2.1:

$$ {}_{n}^{r}f = \frac{C_n^{r+1}}{C_n^r} = \frac{n-r+1}{r} \qquad \text{Ф.2.1} $$

Где: $n = 1; 2; 3; \ldots$ - номер столбца один для всех пар $\frac{C_n^{r+1}}{C_n^r}$; r = 1; 2; 3; … - номер ряда (таблица 3). Отношение ${}_{n}^{r}f$ позволяет рассчитывать биноминальные коэффициенты по ф.2.1.1 вместо формулы сочетаний, ф.1.1. Действительно, пусть C_n^R искомое значение в таблице 3, где: n - номер столбца, R - номер ряда (r - нумерация рядов дана в правом столбце таблицы 3), тогда величина C_n^R рассчитывается по ф.2.1.1, (таблица 2, ячейка 3):

$$C_n^R = \prod_{r=1}^{R-1} \frac{n-r+1}{r} \qquad \text{Ф.2.1.1}$$

Пример 1. Найдём по ф.2.1.1 биноминальный коэффициент $C_{n=11}^{R=4}(165)$, таблица 3. Первый ряд r в ф.3.1.1 всегда равен единице: $r = 1$, отсюда: $C_{n=11}^{R=4} = \frac{11-1+1}{1} \cdot \frac{11-2+1}{2} \cdot \frac{11-3+1}{3}$ = 165.

Вводя факториалы в ф.2.1.1 получим ф.2.1.2:

$$C_n^R = \frac{n!}{(R-1)! \cdot (n-R+1)!} \qquad \text{Ф.2.1.2}$$

Обозначая, в ф.2.1.2, переменной k выражение $R-1$ получаем формулу сочетаний: $C_n^R = \frac{n!}{(R-1)! \cdot (n-R+1)!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$; где: $k = R-1$.

Так как номера строк r и числа k связаны отношением $r = k+1$, (таблица 3), то: $\frac{n-r+1}{r} = \frac{n-(k+1)+1}{k+1} = \frac{n-k}{k+1}$. Поэтому, верна ф.2.2:

$$ {}^{r}_{n}f(r) = {}^{k}_{n}f(k) = \frac{C_n^{r+1}}{C_n^r} = \frac{C_n^{k+1}}{C_n^k} = \frac{n-r+1}{r} = \frac{n-k}{k+1} \qquad \text{Ф.2.2}$$

Где: n - номер столбца в прямоугольном треугольнике Паскаля. Из ф.2.2 следует равенство: $C_n^R = \prod_{r=1}^{R-1}\left(\frac{n-r+1}{r}\right) = \prod_{k=0}^{K-1}\frac{n-k}{k+1}$.

Из сказанного видно, что комбинаторная формула ф.1.1 есть следствие отношений ${}^{r}_{n}f$ соседних значений в столбцах прямоугольного треугольника Паскаля, ф.2.1. Таким образом, комбинаторная формула сочетаний имеет альтернативный математический вывод, основанный на отношении рядов треугольника Паскаля: ф.2.1 и ф.2.1.1. Рассчитывая C_n^R по ф.2.1.1 получаем как треугольник Паскаля, так и любые его отдельные значения. Применение ф.2.1.1, не содержащей внутри себя факториалов, для расчёта биноминальных коэффициентов позволяет рассчитывать биноминальные коэффициенты которые невозможно рассчитать по ф.1.1 из-за слишком больших значений факториалов возникающих в ф.1.1.

Пример 2. Рассчитаем по ф.2.1.1 комбинаторный коэффициент на пересечении четвёртого ряда ($R = 4$) и столбца n = 350, который нельзя получить (по крайне мере, на калькуляторах) по формуле сочетаний ф.1.1, так как присутствующей в ф.1.1факториал: $n!$ = 350! - на калькуляторах взять нельзя: $C_{n=350}^{R=4} = \frac{350-1+1}{1} \cdot \frac{350-2+1}{2} \cdot \frac{350-3+1}{3}$ = 7084700.

<u>Прямоугольный треугольник Паскаля - способ построения по рядам (строкам)</u>. Выведем ещё одну альтернативную формулу расчёта (ф.3.1.1) биноминальных коэффициентов, вместо формулы сочетаний ф.1.1.

Формула ф.3.1 описывает отношение $\frac{C_{n+1}^R}{C_n^R}$, в котором номер ряда $R = const$ постоянен, а n номера столбцов растут (таблица 2, ячейка 4):

$$ {}^{n+1}_{n}\gamma_R = \frac{C_{n+1}^R}{C_n^R} = \frac{n+1}{n-R+2} \qquad \text{Ф.3.1}$$

Величина C_N^R в ряду $R = const$, столбца N рассчитывается по ф.3.1.1:

$$C_N^R = \prod_{n=R-1}^{n=N-1} \frac{n+1}{n-R+2} \qquad \text{Ф.3.1.1}$$

По ф.3.1.1 рассчитывают строки (ряды) из биноминальных коэффициентов и составляют из строк прямоугольный треугольник Паскаля.

Пример 3. Найдём по ф.3.1.1 биноминальный коэффициент $C_{N=12}^{R=10}(220)$, таблица 3. Начальное значение n по ф.3.1.1 для $C_{N=12}^{R=10}$, равно: $n = R - 1$= 10 - 1 = 9, отсюда: $C_{N=12}^{R=10} = \frac{9+1}{9-10+2} \cdot \frac{10+1}{10-10+2} \cdot \frac{11+1}{11-10+2} =$ 220.

Пример 4. Рассчитаем биноминальный коэффициент $C_{N=1000}^{R=998}$ для тысячного столбца, N = 1000 и строке с номером R = 998. Начальное значение n по ф.3.1.1 для $C_{N=1000}^{R=998}$, равно: $n = R - 1$ = 998 – 1 = 997. Отсюда, по ф.3.1.1: $C_{N=1000}^{R=998} = \frac{997+1}{997-998+2} \cdot \frac{998+1}{998-998+2} \cdot \frac{999+1}{999-998+2}$ = 166167000. Полученный комбинаторный коэффициент (166167000) нельзя проверить на калькуляторе с помощью комбинаторной формулы сочетаний ф.1.1, так как обычный калькулятор выдаст ошибку переполнения при операции: 1000!

Способ построения прямоугольного треугольника Паскаля по его диагоналям. Выведем ещё одну альтернативную формулу расчёта биноминальных коэффициентов (ф.3.2.1), вместо формулы сочетаний ф.1.1. Рассмотрим линии, проходящие через два значения: C_n^k; C_{n+1}^{k+1} (таблица 2, ячейка 5), в которых k и n являются переменными. Каждое новое значение, у таких линий, имеет прирост на единицу по двум координатам $(k; n)$: C_{n+1}^{k+1}, пример: $C_{n=2}^{k=0}(1)$; $C_{n=3}^{k=1}(3)$; $C_{n=4}^{k=2}(6)$; $C_{n=5}^{k=3}(10)$; $C_{n=6}^{k=4}(15)$; $C_{n=7}^{k=5}(21)$; $C_{n=8}^{k=6}(28)$; … (смотри таблицу 3) .

Для получения закона регулирующего изменения биноминальных коэффициентов вдоль по линиям, найдём отношение: C_{n+1}^{k+1}/C_n^k, ф.3.2.

$$\frac{C_{n+1}^{k+1}}{C_n^k} = \frac{n+1}{k+1} \qquad \text{Ф.3.2}$$

Искомый коэффициент C_N^K в линии (ф.3.2), рассчитывается по ф.3.2.1:

$$C_N^K = \prod_{\substack{n=N-K \\ k=0}}^{\substack{n=N-1 \\ k=K-1}} \left(\frac{n+1}{k+1}\right) \qquad \text{Ф.3.2.1}$$

Пример 5. Нахождение по ф.3.2.1 биноминального коэффициента $C_{N=12}^{K=3}(220)$, таблица 3.

Для нахождения величины коэффициента $C_{N=12}^{K=3}$ нужно найти номер n_0 «стартового» коэффициента, у которого k = 0: $C_{n=n_0}^{k=0}$. Замечаем, что нумерация k и n начинается с нуля (таблица 3), и прирост по осям k и n одинаков, и равен единице (ф.3.2). Поэтому значение n_0 зависит от значений K; N, искомого биноминального коэффициента C_N^K, по ф.3.2.2:

$$n_0 = N - K \qquad \text{Ф.3.2.2}$$

В нашем примере 5: $n_0 = K$ = 12 – 3 = 9, значения рассматриваемой линии (смотри таблицу 3): $C_{n=9}^{k=0}(1)$; $C_{n=10}^{k=1}(10)$; $C_{n=11}^{k=2}(55)$; $C_{n=12}^{k=3}(220)$. Так как n_0 = 9, то по ф.3.2.1: $C_{N=12}^{K=3} = \frac{9+1}{0+1} \cdot \frac{10+1}{1+1} \cdot \frac{11+1}{2+1}$ = 220.

Пример 6. Нахождение биноминального коэффициента $C_{n=10000}^{k=3}$ по ф.3.2.1. Сначала найдём n_0 по ф.3.2.2: $n_0 = N - K$ = 10000 – 3 = 9997. Отсюда, по ф.3.2.1: $C_{n=10000}^{k=3} = \frac{9997+1}{0+1} \cdot \frac{9998+1}{1+1} \cdot \frac{9999+1}{2+1}$ = 166616670000 - этот коэффициент нельзя проверить с помощью формулы сочетаний ф.1.1, так как обычный калькулятор выдаст ошибку переполнения при операции: 10000!

Равнобедренный треугольника Паскаля - расчёт значений на оси симметрии. Рассчитаем коэффициенты через отношение соседних величин $C_{x=0}^l$ лежащих на оси симметрии равнобедренного треугольника Паскаля (таблица 2, ячейка 6). Для этого найдём $C1/C2$ - отношение двух соседних биноминальных коэффициентов лежащих на оси симметрии треугольника. Замечаем, что на оси симметрии коэффициенты расположены не в каждом ряду l, а через ряд и номера рядов l – нечётные, рисунок 1 (в таких рядах содержится нечётное число коэффициентов: l = 1; 3; 5; …), ф.4.1.

Отношение двух соседних биноминальных коэффициентов лежащих на оси симметрии можно записать в виде: $C_{x=0}^{l+1} : C_{x=0}^{l}$ - указывая нулевую координату этих коэффициентов в симметричной системе координат (рисунок 1), или в виде: C_{l+2}^{max}/C_l^{max}, где: max - указывает на величину коэффициента C в ряду l, а l соответствует длине строки (число биноминальных коэффициентов ряда): $\frac{C_{l+2}^{max}}{C_l^{max}} = \frac{(l+1)!\cdot\left(\frac{l-1}{2}\right)!\cdot\left(\frac{l-1}{2}\right)!}{(l-1)!\cdot\left(\frac{l+1}{2}\right)!\cdot\left(\frac{l+1}{2}\right)!} = \frac{(l+1)\cdot l\cdot\left(\frac{l-1}{2}\right)!\cdot\left(\frac{l-1}{2}\right)!}{\left(\frac{l+1}{2}\right)!\cdot\left(\frac{l+1}{2}\right)!} = \frac{(l+1)\cdot l\cdot\left(\frac{l-1}{2}\right)!\cdot\left(\frac{l-1}{2}\right)!}{\left(\frac{l+1}{2}\right)\cdot\left(\frac{l-1}{2}\right)!\cdot\left(\frac{l+1}{2}\right)\cdot\left(\frac{l-1}{2}\right)!} = \frac{4\cdot l}{l+1}$.

Перепишем полученный результат в виде ф.4.1:

$$\frac{C_{l+2}^{max}}{C_l^{max}} = \frac{4 \cdot l}{l+1}; \quad l = 1; 3; 5; \ldots \qquad \text{Ф.4.1}$$

Номера нечётных рядов l можно задать как вручную, так и формулой через формальный параметр n по ф.4.1.1:

$$l = 2 \cdot n + 1; \quad n = 0;\ 1;\ 2;\ \ldots \qquad \text{Ф.4.1.1}$$

Номер максимального по значению биноминального коэффициента C_L^{max} в строке L рассчитывается по ф.4.1.2:

$$C_L^{max} = \frac{L+1}{2} \qquad \text{Ф.4.1.2}$$

Формула ф.4.2 - для расчёта биноминального коэффициента C_L^{max}, лежащего в строке L на оси симметрии $\left(k = \frac{L+1}{2}\right)$ равнобедренного треугольника Паскаля (таблица 2, ячейка 6), следует из ф.4.1:

$$C_L^{\frac{L+1}{2}} = \prod_{\substack{l=1;\\ l=l+2}}^{l=L-2} \frac{4 \cdot l}{l+1};\ \text{где } l = 1; 3; 5; \ldots \qquad \text{Ф.4.2}$$

Пример 7. Расчёт по ф.4.2 биноминального коэффициента: $C_{L=9}^{5}(70)$, на оси симметрии равнобедренного треугольника Паскаля (таблица 1). По ф.4.1.2 проверяем центральное расположение коэффициента в ряду: $C_{L=9}^{max} = \frac{L+1}{2} = \frac{9+1}{2} = 5$. Рассчитываем: $C_{L=9}^{5} = \frac{4 \cdot 1}{1+1} \cdot \frac{4 \cdot 3}{3+1} \cdot \frac{4 \cdot 5}{5+1} \cdot \frac{4 \cdot 7}{7+1} = 70$.

Очевидно, что: $\lim_{l \to \infty} \left(\frac{4 \cdot l}{l+1}\right) = 3 \cdot l$; при расчёте неизвестного меньшего значения C_l^{max}от известного C_{l+2}^{max}, большего, значения числителя и знаменателя в отношении $\frac{4 \cdot l}{l+1}$ меняются местами: $C_l^{max} = C_{l+2}^{max} \cdot \frac{l+1}{4 \cdot l}$; максимальные коэффициенты C_{l-1}^{max} строки $l-1$ равны: $C_{l-1}^{max} = \frac{C_l^{max}}{2}$.

<u>*Расчёт биноминальных коэффициентов на диагоналях Фибоначчи*</u>. Найдём формулу расчёта биноминальных коэффициентов в каждой диагонали Фибоначчи (таблица 2, ячейка 7). Для этого найдём отношение ${}_n^k f(k)$ двух соседних коэф-тов диагонали: $\frac{C_{n-1}^{k+1}}{C_n^k}$, где n- номер ряда в равнобедренном треугольнике, k - номер коэф – та в этом ряде (смотри таблицу 1 и 3): ${}_n^k f(k) = \frac{C_{n-1}^{k+1}}{C_n^k} = \frac{(n-1)\,!}{(k+1)! \cdot ((n-1)-(k+1))!} : \frac{n\,!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{(n-1)\,!}{(k+1)! \cdot ((n-1)-(k+1))!} \cdot \frac{k! \cdot (n-k)\,!}{n!} = \frac{(n-k) \cdot (n-k-1)}{(k+1) \cdot n} = \frac{d(d-1)}{nk+n}$; $d = n - k > 0$. Запишем результат в виде ф.5.1:

$${}_n^k f(k) = \frac{C_{n-1}^{k+1}}{C_n^k} = \frac{(n-k) \cdot (n-k-1)}{(k+1) \cdot n} \qquad \text{Ф.5.1}$$

Зная число Фибоначчи F (таблица 2, ячейка 7), мы знаем номер ряда r_F равнобедренного треугольника Паскаля, который содержит единицу из диагонали Фибоначчи.

Пример 8. Пятый ряд треугольника (1-5-10-10-5-1) содержит единицу, входящую в число Фибоначчи: $F=8$ (образовано суммой из диагонали: 1+4+3 = 8). В таблице 4 отношения коэффициентов по ф.5.1: n - номер нижнего, более длинного ряда; k - номер коэффициента в нижнем ряду.

Таблица 4. Отношение коэффициентов в диагоналях Фибоначчи

C_n^k	ряд n	k	${}_n^{k+1}f = \frac{C_{n-1}^{k+1}}{C_n^k} = \frac{(n-k) \cdot (n-k-1)}{(k+1) \cdot n}$	${}_n^{k+1}f$	$C_{n-1}^{k+1} = C_n^k \cdot {}_n^{k+1}f$
3	3	2	нет	нет	нет
4	4	1	$\frac{(4-1) \cdot (4-1-1)}{(1+1) \cdot 4} = \frac{6}{8}$	$\frac{C_3^2}{C_4^1} = \frac{3}{4}$	$C_{4-1}^{1+1} = 4 \cdot \frac{3}{4} = 3$
1	5	0	$\frac{(5-0) \cdot (5-0-1)}{(0+1) \cdot 5} = \frac{20}{5}$	$\frac{C_4^1}{C_5^0} = \frac{4}{1}$	$C_{5-1}^{0+1} = 1 \cdot \frac{4}{1} = 4$
$F = C_5^0 + C_4^1 + C_3^2 = 1 + 4 + 3 = 8$					

На биноминальных коэффициентах, лежащих в диагоналях Фибоначчи, показано, что и по сложным отношениям можно проводить расчёты по вычислению биноминальных коэффициентов.

Обсуждение

В статье рассмотрен способ перемножения биноминальных коэффициентов в треугольниках Паскаля. Этот способ позволяет строить эти треугольники, исходя из отношений между биноминальными коэф-тами, и эти биноминальные коэффициенты могут находиться в любых рядах.

Практически значим случай расчёта мат. ожиданий в столбце n, так как позволяет получить все значения X_n^r столбца n из одного измеренного в эксперименте значения X_n^i, по ф.2.1 (таблица 2, ячейка 3). Пусть величина X получена в эксперименте. На практике X имеет случайное значение, но для наглядности примем X = 70 (таблица 3, столбец n = 8, строка r = 5). Если известны координаты X: n; r, то все остальные значения X_n^r биноминального распределения рассчитываются по ф.2.1.

Для примера рассчитаем соседние с $X_{n=8}^{r=5}$ величины: $X_{n=8}^{r=4}$; $X_{n=8}^{r=6}$. Так как по ф.2.1: $X_{n=8}^{r+1} : X_{n=8}^{r=5} = \frac{n-r+1}{r}$, то $X_{n=8}^{r+1} = \frac{n-r+1}{r} \cdot X_{n=8}^{r=5} = \frac{8-5+1}{5} \cdot 70 = 56$; так как: $X_{n=8}^{r+1} : X_{n=8}^{r=4} = \frac{n-r+1}{r}$, то $X_{n=8}^{r=4} = X_{n=8}^{r+1} : \frac{n-r+1}{r} = 70 : \frac{8-4+1}{4} = 56$ (смотри таблицу 3). Повторяя проделанные шаги с новыми полученными значениями $X_{n=8}^r$, как по растущему r, так и по убывающему r, мы получим все значения биноминального распределения для столбца n и, этим, окончим расчёт значений столбца n по экспериментально полученной величине X_n^r.

Отметим, что X_n^{r-1} рассчитывается от X_n^r по ф.5.2:

$$X_n^{r-1} = X_n^r \cdot \frac{r-1}{n-(r-1)+1} \qquad \text{Ф.5.2}$$

Пример. Рассчитать X_n^{r-1} по ф.5.2, если $n = 10$, r = 3, $X_{n=10}^{r=3}$= 45. По ф.5.2 получаем: $X_{n=10}^{r-1} = 45 \cdot \frac{3-1}{10-(3-1)+1}$ = 10, смотри таблицу 3.

Коэффициент ${}_n^r f = \frac{X_{n1}^{r1}}{X_{n2}^{r2}}$ позволяет сжимать экспериментальные данные, описываемые биноминальным распределением. Сжатие достигается за счёт того, что указывается только одно значение X_nиз столбца, а все остальные значения этого столбца получаются расчётным путём: $X_n^R = X_n \cdot \prod_r^R {}_n^r f$. При этом в величину X_n может быть введён коэффициент масштаба ${}^n\mu$, что позволяет масштабировать получаемые результаты: $x_n^R = ({}^n\mu \cdot X_n) \cdot \prod_r^R {}_n^r f$, избавляя малоразрядные вычислительные средства от ошибки переполнения.

Любое произвольное место X_n в получаемых экспериментально данных можно взять за единицу: ${}^n\mu \cdot X_n = 1$, и используя отношения между значениями таблицы в виде коэффициентов можно уйти от переполнения на данном уровне, работая дальше в выбранном масштабе значений.

Различия треугольника Паскаля и комбинаторного треугольника.

Различие между треугольником Паскаля (таблица 1) и комбинаторным треугольником (таблица 3) заключается в окружающих их пространстве. Пространство вокруг треугольника Паскаля, по закону Паскаля [1], со всех сторон заполнено нулями. А пространство вокруг комбинаторных треугольников заполняется некими шумовыми значениями, которые получаются из формул: ф.1.1; ф.2.1.1; ф.3.1.1; ф.3.2.1; ф.5.1, при выходе параметров указанных формул за границы значений треугольника Паскаля (биноминальных коэффициентов). Назовём эти перечисленные формулы: «Комбинаторными симуляторами треугольника Паскаля», или сокращённо: «Па – симуляторы». Па – симуляторы создают вокруг симулируемых ими треугольников Паскаля числовые поля, описание которых выходит за рамки этой статьи и свойства которых не исследованы. Но заметим, что при работе с *комбинаторным* треугольником, создаваемое па – симулятором пространство, делится на две области. Область, в которой значения совпадают и область, в которой значения не совпадают со значениями из пространства треугольника Паскаля. Только по молчаливому согласию и желанию исследователей *пространство па – симуляторов* всегда на всех схемах принимает форму треугольника Паскаля. Хотя на самом деле точки внутри создаваемого пространства па – симуляторами существуют и рассчитываются независимо друг от друга и никак не связаны друг с другом (таблица 2, ячейка 2). И, в комбинаторных треугольниках, построенных при помощи па – симуляторов, комбинаторные коэффициенты рассчитываются в произвольном порядке (не по правилу Паскаля [1]), совсем не обязательно в виде целостной треугольной формы (таблица 2, ячейка 2). Значения, полученные на па – симуляторах, могут быть рассчитаны в виде случайным образом заполняющих сектор точек (биноминальных коэффициентов), областей, прямых линий. Точки могут быть разбросаны в произвольных областях (сгруппированы) в виде фигур любых форм. Только что описанные вещи недопустимы для истинного треугольника Паскаля, построенного по правилу Паскаля [1]. При отсутствии единицы в вершине, ни одна область в истинном треугольнике Паскаля не может быть построена, в формулах па – симуляторов вершинная единица не является обязательной необходимостью.

Для пояснения сказанного, рассмотрим отношения биноминальных коэффициентов ${}_n^{n+1}\gamma_R = \frac{C_{n+1}^R}{C_n^R}$, по ф.3.1 (способ построения по строкам, таблица 2, ячейка 4), принадлежащих одной строке прямоугольного треугольника Паскаля (ПТП). В таблице 3 мы обрывали построение ПТП на единице в каждом ряду. Но, пи – симулятор, может получать значения по ф.3.1 лежащие перед единицами (слева от единиц), таблица 5. Отметим, что рассматриваемый пи – симулятор выдаёт в соответствии с правилом Паскаля нулевые значения слева от единиц, кроме корневой (вершинной) единицы. Но, как раз, относительно величины значения лежащего слева от вершины треугольника, правило Паскаля ничего не говорит, так как это значение не участвует в образовании ни одного биноминального коэффициента в треугольнике Паскаля. Величина значения слева от вершины ПТП, по пи – симулятору, ф.3.1, равна минус бесконечности. И все значения слева от вершины ПТП в ряду r = 1 равны минус бесконечности, таблица 5. Всё пространство над значениями равными минус бесконечности и слева от вершины ПТП, заполнено не определёнными значениями (таблица 5).

Таблица 5. Пространство у вершины ПТП, созданное по ф.3.1

k = 4	…	$-\infty \cdot 0$	$-\infty \cdot 0$	$-\infty \cdot 0$	*0*	*0*	*0*	*0*	**1**	…	r = 5
k = 3	…	$-\infty \cdot 0$	$-\infty \cdot 0$	$-\infty \cdot 0$	*0*	*0*	*0*	**1**	**4**	…	r = 4
k = 2	…	$-\infty \cdot 0$	$-\infty \cdot 0$	$-\infty \cdot 0$	*0*	*0*	**1**	**3**	**6**	…	r = 3
k = 1	…	$-\infty \cdot 0$	$-\infty \cdot 0$	$-\infty \cdot 0$	*0*	**1**	**2**	**3**	**4**	…	r = 2
k = 0	…	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	…	r = 1
ν	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	…	n

Разберём заполнение таблицы 5 по пи – симулятору ф.3.1 (таблица 2, ячейка 4) для значений слева от единиц прямоугольного треугольника Паскаля. В ф.3.1 буква n обозначает номер столбца (таблица 3, 5): n = 0; 1; 2; …, обозначим буквой ν отрицательные номера столбцов: ν = -1; -2; -3; …. Поэтому, ф.3.1 запишем: ${}^{n+1}_{\ \ n}\gamma_R = \frac{C^R_{n+1}}{C^R_n} = \frac{n+1}{n-R+2} \rightarrow C^R_n = \frac{C^R_{n+1}}{{}^{n+1}_{\ \ n}\gamma_R} = C^R_{n+1} \cdot \frac{\nu-R+2}{\nu+1}$. Рассчитаем значение биноминального коэффициента во втором ряду ($R = 2$), в нулевом столбце ($\nu = n$ = 0), оно равно нулю - $C^{R=2}_{\nu=0}(0)$: $C^{R=2}_{\nu=0} = C^{R=2}_{n=1} : \frac{\nu+1}{\nu-R+2} = 1 \cdot \frac{\nu-R+2}{\nu+1} = 1 \cdot \frac{0-2+2}{0+1} = 0$. Число нулей k перед единицей ряда (до пространства неопределённых значений «$-\infty \cdot 0$») равно номеру ряда минус один: $k = r - 1$ (смотри таблицу 5).

Рассчитаем значение во втором ряду ($R = 2$), в минус первом столбце ($\nu = n$ = -1): $C^{R=2}_{\nu=-1}(-\infty \cdot 0)$ - оно не определено: $C^{R=2}_{\nu=-1} = C^{R=2}_{n=0} : \frac{\nu+1}{\nu-R+2} = 0 \cdot \frac{\nu-R+2}{\nu+1} = 0 \cdot \frac{-1-2+2}{-1+1} = -\infty \cdot 0$.

Рассчитаем значение в первом ряду ($R = 1$), в минус первом столбце ($\nu = n$ = -1): $C^{R=1}_{\nu=-1}(-\infty)$ - оно равно минус бесконечности: $C^{R=1}_{\nu=-1} = C^{R=1}_{n=0} : \frac{\nu+1}{\nu-R+2} = 1 \cdot \frac{\nu-R+2}{\nu+1} = 1 \cdot \frac{-1-2+2}{-1+1} = -\infty$. Рассчитаем значение в первом ряду ($R = 1$), в минус втором столбце ($\nu = n$ = -2): $C^{R=1}_{\nu=-2} = C^{R=1}_{n=-1} : \frac{\nu+1}{\nu-R+2} = -\infty \cdot \frac{\nu-R+2}{\nu+1} = -\infty \cdot \frac{-2-2+2}{-2+1} = -\infty$ (оно равно минус бесконечности). Первый ряд ($R = 1$) с единичной вершиной треугольника «упирается» в полуось из отрицательных бесконечных значений (таблица 5).

Положение истинного треугольника Паскаля в пространстве из нулей определяется положением его единичной вершины. А положение комбинаторного треугольника в пространстве неопределённых величин определяется любым членом C^n_k, который первым будет помещён в пространство неопределённых величин (в качестве первого члена C^n_k помещаемого в пространство неопределённых величин может выступить и вершинная единица комбинаторного треугольника).

Так как помещение в пространство неопределённых величин любого первого члена C^n_k комбинаторного треугольника определяет (задаёт) в этом пространстве внутреннюю систему n, k координат этого комбинаторного треугольника, то это первое значение C^n_k является предком (причиной) появления всех остальных (последующих) значений комбинаторного треугольника.

Оставим без развития тему ориентации обоих типов треугольников (Паскаля и комбинаторного) в их пространствах (пространстве из нулей, в пространстве из неопределённых величин). Заметим лишь, что ориентации существуют и наблюдаются. В качестве подтверждения значимости ориентаций треугольников в пространстве, для вывода формулы сочетаний C^n_k из свойств комбинаторного треугольника, перейдём к такому пространственному положению комбинаторного треугольника, которое превращает его форму из классической формы треугольника Паскаля (таблица 1) в прямоугольно – радиальную форму (таблица 3), в которой (прямоугольной форме треугольника) гипотенуза комбинаторного треугольника ассоциируется с радиусом единичной окружности.

Треугольник Паскаля и бинарные коэффициенты тесно связаны с инверсиями в бинарных словах [4]. Мои работы были направлены на создание теории случайной бинарной пос-ти [2, 3, 5, 6, 7, 8,10], поэтому начатые в [4] исследования по треугольнику Паскаля публикуются сейчас.

<u>Формула числа инверсий в случайных бинарных словах и формула сочетаний</u>. При наборе статистического значимого количества L бинарных слов длиной l (где l - это число случайных бинарных событий) математическое ожидание $M(L)$ числа инверсий (перепадов от нуля к единице: «01», и от единице к нулю: «10») внутри L рассчитывается по ф.6.1 [2,3,9]:

$$M(L, l, i) = \frac{L}{2^{l-1}} \cdot \frac{(l-1)\,!}{i! \cdot (l-1-i)!} = \frac{L}{2^n} \cdot \frac{n\,!}{i! \cdot (n-i)!} \qquad \text{Ф.6.1}$$

Где: n – начинает нумерацию событий с нуля, а l - начинает нумерацию событий с единицы, смотри ф.1.1 и таблицу 3: $n = l - 1$.

В ф.6.1 множитель $\frac{n\,!}{i!\cdot(n-i)!}$ - комбинаторная формула сочетаний. Рассмотрим пример на ф.6.1. Пусть поток случайных бинарных событий (подбрасывание честной монеты) последовательно делят на слова равной длины l = 4 (каждое слово содержит n=4 случайных события, типа броска монеты), всего получено $L = 5 \cdot 10^6$ слов. Найти число слов, в которых будет две инверсии: i = 2. Выпишем возможные варианты слов длиной l = 4, внутри с i = 2 инверсиями: «0100»; «0010»; «1001»; «1011»; «1101»; «0110». Подставляем в ф.6.1 исходные данные: L, l, i и получаем матожидание ${}^{l=4}_{i=2}M(L)$ числа событий группы $i2$: ${}^{l=4}_{i=2}M(L) = \frac{5\cdot10^6}{2^{4-1}}\cdot\frac{(4-1)\,!}{2!\cdot(4-1-2)!} = 1875000$. Вероятность выпадения всех комбинаций $i2$ одинакова (поскольку нет процесса поиска), то мат ожидание выпадений любой из них: $\frac{L}{2^n}$ =312500.

Так как число слов $L = N/l$ связано с числом бросков монеты N, то $N = L \cdot l$, и ф.6.1 можно выразить через число бросков монеты N и длину каждого слова l, ф.6.2:

$$M(N, l, i) = \frac{N}{l}\cdot\frac{1}{2^{l-1}}\cdot\frac{(l-1)\,!}{i!\cdot(l-1-i)!} \qquad \text{Ф.6.2}$$

Выводы

Были рассмотрены отношения биноминальных коэффициентов, типа: один ряд – разные столбцы, разные ряды – один столбец, разные столбцы – разные ряды; цепочка произведений из этих отношений позволяет рассчитывать величины любых искомых биноминальных коэффициентов.

Представлены альтернативные формулы расчёта биноминальных коэффициентов. Эти формулы производят расчёт биноминальных коэффициентов, находящихся на значительно большем удалении от вершины треугольника Паскаля, чем удаление, которое можно получить на аналогичных вычислительных мощностях, при помощи «лобового» использования комбинаторной формулы сочетаний, они предоставляют альтернативный путь построения треугольника Паскаля.

Имитирующие построение треугольника Паскаля комбинаторные симуляторы имеют в области биноминальных коэффициентов допустимую степень совпадения с треугольником Паскаля, а в пространстве, окружающим истинный треугольник Паскаля, значения, полученные по этим формулам, не совпадают с требованиями правил Паскаля.

Имитирующие построение истинного треугольника Паскаля комбинаторные симуляторы нарушают причинно – следственные характеристики истинного треугольника Паскаля. Нарушение причинно–следственных характеристик заключается в том, что комбинаторные симуляторы не нуждаются в единичной вершине треугольника для его построения, и, для них, отсутствует последовательность создания рядов: от первых рядов к последующим рядам. Все предыдущие ряды не нужны комбинаторным симуляторам для построений любых конфигураций биноминальных коэффициентов. Ещё одно отличие заключается в том, что комбинаторным симуляторам не нужно внешнее окружение треугольника Паскаля, заполненное нулями.

Представленные симуляторы построения треугольника Паскаля занимают промежуточное положение между правилами Паскаля (нарушают их) и комбинаторной формулы сочетаний, в отличие от неё они нуждаются в значениях биноминальных коэффициентов предыдущих рядов.

Для прямоугольного треугольника Паскаля, который создаётся симулятором по рядам (ф.3.1.1), число нулей перед единицей ряда (до пространства неопределённости) равно номеру ряда минус один, что частично отвечает закону Паскаля. Ряд с единичной вершиной «упирается» в полуось из отрицательных бесконечных значений.

Список литературы

1. *Успенский В.А.* «Популярные лекции по математике». Выпуск № 43. «Треугольник Паскаля» издание второе, дополненное. Москва «Наука», 1979 г. С. 17.
2. *Филатов О.В., Филатов И.О., Макеева Л.Л. и др.* «Потоковая теория: из сайта в книгу». Москва, «Век информации», 2014. С. 200.
3. *Филатов О.В., Филатов И.О.* «Закономерность в выпадении монет – закон потоковой последовательности». Германия, Издательский Дом: LAPLAMBERT Academic Publishing, 2015. С. 268.
4. *Филатов О.В.* Статья «Бинарная потоковая последовательность – не Марковский процесс выпадения монеты. Бинарные слова и треугольник Паскаля». «Журнал научных публикаций аспирантов и докторантов». Стр. 166. № 11, 2014.

5. *Филатов О.В., Филатов И.О*. Статья «О закономерностях структуры бинарной последовательности». «Журнал научных публикаций аспирантов и докторантов», 2014. № 5 (95). С. 226–233.
6. *Филатов О.В*. Статья «Теорема «Об амплитудно-частотной характеристике идеальной бинарной случайной последовательности». «Проблемы современной науки и образования», 2015 г. № 1 (31). С. 5–11.
7. *Филатов О.В.* Статья «Доказательство теоремы: «Формула для цуг из составных событий, образующих случайную бинарную последовательность». Журнал «Проблемы современной науки и образования / Problems of modern science and education», 2017. № 20 (102). С. 6-12.
8. *Филатов О.В*. Статья «Derivation of formulas for Golomb postulates. A method for creating pseudo-random sequence of frequencies Mises. Basics "Combinatorics of long sequences." / Вывод формул для постулатов Голомба. Способ создания псевдослучайной последовательности из частот Мизеса. Основы «Комбинаторики длинных последовательностей». Журнал «Проблемы современной науки и образования / Problems of modern science and education». № 17 (59), 2016 г.
9. *Филатов О.В*. Статья «Расчёт численностей поисковых шаблонов в парадоксе Пенни». «Проблемы современной науки и образования». № 11 (41), 2015 г.
10. *Филатов О.В*. Статья «Определение случайной бинарной последовательности как комбинаторного объекта. Расчёт совпадающих фрагментов в случайных бинарных последовательностях». «Проблемы современной науки и образования / Problems of modern science and education». № 6 (48), 2016 г.