Memory effects in hereditary Keynesian model
Tarasova V.[1], Tarasov V.[2]
Эффекты памяти в эредитарной модели Кейнса
Тарасова В. В.[1], Тарасов В. Е.[2]

[1]Тарасова Валентина Васильевна / Tarasova Valentina – магистрант,
Высшая школа бизнеса;
[2]Тарасов Василий Евгеньевич / Tarasov Vasily – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник,
Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д. В. Скобельцына
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва

Аннотация: *в статье обсуждается обобщение модели Кейнса, учитывающее эффекты динамической памяти. Получены уточненные решения дифференциальных уравнений с производными нецелого порядка, описывающие динамику национального дохода при учете эффектов памяти в рамках эредитарной модели Кейнса. Построены новые графики зависимостей экономической динамики от эффектов памяти.*

Abstract: *the article discusses the generalization of Keynes's model, which takes into account the effects of dynamic memory. We obtain the corrected solutions of differential equations with derivatives of non-integral order, which describe the dynamics of the national income, taking into account memory effects in the framework of the hereditary Keynes model. We give new graphs, which describe the dependence of the economic dynamics from the memory effects.*

Ключевые слова: *модель Кейнса, модель экономического роста, эффекты памяти, эредитарность, производные нецелого порядка.*

Keywords: *Keynes model, economic growth model, memory effects, hereditarity, derivatives of non-integer order.*

Одной из наиболее известных моделей экономического роста является модель Кейнса, которая была предложена основателем современной макроэкономической теории Джоном Кейнсом [1]. Рассмотрим динамическую модель Кейнса с непрерывным временем [2, с. 95-98]. В этой модели используются следующие переменные, описывающие доходную и расходную части национальной экономики и являющиеся функциями времени: $Y(t)$ – национальный доход, $C(t)$ – потребление, $I(t)$ – инвестиции, $E(t)$ – государственные расходы (государственное потребление, независимые инвестиции, независимые расходы на капиталовложения). Уравнение баланса устанавливает равенство национального дохода сумме всех расходов

$$Y(t) = C(t) + I(t) + E(t). \qquad (1)$$

В модели Кейнса общее потребление $C(t)$ равно сумме внутреннего потребления некоторой части национального дохода и конечного потребления, независящего от дохода. В результате потребление и доход связываются линейным уравнением мультипликатора

$$C(t) = m(t) \cdot Y(t) + b(t), \qquad (2)$$

где $m(t)$ – коэффициент мультипликатора, описывающий склонность к потреблению ($0<m(t)<1$), а функция $b(t)$ описывает часть потребления (расходы на личное потребление), которая не зависит от дохода. Выражение $m(t)\cdot Y(t)$ описывает часть потребления, зависящую от дохода.

В модели Кейнса предполагается, что величина инвестиций $I(t)$ определяется скоростью изменения дохода (предельным национальным доходом) и описывается линейным уравнением акселератора

$$I(t) = a(t) \cdot \frac{dY(t)}{dt}, \qquad (3)$$

где $a(t)$ – норма акселерации, которая характеризует уровень технологий и инфраструктуры государства, и $dY(t)/dt$ – производная первого порядка функции дохода $Y(t)$ по времени.

Подставляя уравнение мультипликатора (2) и уравнение акселератора (3) в уравнение баланса (1), получаем уравнение Кейнса

$$\frac{dY(t)}{dt} - \frac{1-m(t)}{a(t)} \cdot Y(t) = -\frac{E_b(t)}{a(t)}, \qquad (4)$$

где функция $E_b(t) = E(t) + b(t)$ описывает независимые расходы, то есть расходы, независящие от доходов.

Для простоты рассмотрим случай, когда a, b, m и E являются постоянными величинами. В этом случае решение дифференциального уравнения (4) с постоянными коэффициентами принимает вид

$$Y(t) = \frac{E_b}{1-m}\left(1 - \exp\left(\frac{1-m}{a} \cdot t\right)\right) + Y(0) \cdot \exp\left(\frac{1-m}{a} \cdot t\right). \qquad (5)$$

Решение (5) уравнения Кейнса (4) описывает динамику экономического роста при постоянной склонности к потреблению и норме акселерации, постоянном конечном потреблении и постоянной величине государственных расходов.

Уравнение Кейнса (4) и его решение (5) предполагают, что зависимость между инвестициями и предельной величиной национального дохода задается формулой (3), а зависимость (2) связывает потребление и доход. Уравнения (2) и (3) подразумевают мгновенное изменение показателей при изменении факторов, то есть уравнения мультипликатора (2) и уравнение акселератора (3) не учитывают эффекты динамической памяти и запаздывания.

Понятий акселератора с памятью и мультипликатора с памятью, было предложено в работе [3, 4], В работах [5, 6, 7] предлагается понятие предельных (маржинальных) величин. Для описания эффектов памяти применялся математический аппарат производных и интегралов нецелого порядка [8, 9]. Использование понятий акселератора с памятью и мультипликатора с памятью, предложенных в работе [3], позволяет строить модели экономического роста, учитывающие эффекты памяти. В статье [10] было предложено обобщение модели Кейнса, учитывающее эффекты динамической памяти со степенным затуханием. Некоторые решения, приведенные в статье [10], содержат лишний множитель (гамма-функцию от показателя затухания памяти). В данной работе предлагаются исправленные решения уравнений эредитарной модели Кейнса, описывающие зависимость динамики национального дохода от эффектов памяти, и строятся соответствующие графики зависимости дохода от времени и показателя затухания памяти.

Для учета эффектов динамической памяти в макроэкономических моделях, необходимо использовать обобщение формулы (2), описывающей взаимосвязь между инвестициями и предельной величиной дохода (скоростью роста дохода). Используя понятие предельной (маржинальной) величины нецелого порядка, предложенное в работе [5, 7], нами было получено уравнение акселератора с памятью [3, 4, 10]. В случае степенного затухания памяти, уравнение акселератора с памятью записывается в виде

$$I(t) = a \cdot (D_{0+}^{\alpha}Y)(t), \qquad (5)$$

где $(D_{0+}^{\alpha}Y)(t)$ – производная Капуто порядка $\alpha \geq 0$, определяемая уравнением

$$(D_{0+}^{\alpha}Y)(t) := \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t \frac{Y^{(n)}(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}, \qquad (6)$$

где $\Gamma(\alpha)$ – гамма функция, $Y^{(n)}(\tau)$ – производная целого порядка n:=[α]+1 функции $Y(\tau)$ по переменной τ: 0<τ<t. В формуле (6) предполагается, что функция $Y(\tau)$ имеет производные вплоть до (n-1) порядка, которые являются абсолютно непрерывными функциями на интервале [0,t]. Для α=1 уравнение (5) дает уравнение (3).

Для учета эффектов памяти в динамической модели Кейнса, нами было предложено [10] воспользоваться дифференциальным уравнением (5), описывающим эредитарную взаимосвязь между инвестициями и предельным (маржинальным) доходом порядка α>0. Для простоты будем рассматривать коэффициенты мультипликатора и акселератора постоянными (m(t)=m, a(t)=a). Подставив выражение для I(t) из формулы (5) и выражение (2) в уравнение баланса (1), получим обобщение уравнения Кейнса в виде

$$(D_{0+}^{\alpha}Y)(t) - \frac{1-m}{a} \cdot Y(t) = -\frac{E_b(t)}{a}, \qquad (7)$$

где $E_b(t) = E(t) + b(t)$ – независимые расходы. Уравнение (7) является неоднородным дифференциальным уравнением с производной порядка α>0. Эредитарная модель Кейнса, базирующаяся на уравнении (7), учитывает эффекты памяти с затуханием (угасанием) степенного типа с показателем α≥0. Для α=1 уравнение (7) совпадает с уравнением (4).

Получим решение уравнения (7), которое описывает эредитарную модель Кейнса, учитывающую эффекты памяти. Известно [8, с. 323], что дробное дифференциальное уравнение

$$(D_{0+}^{\alpha}Y)(t) - \lambda \cdot Y(t) = f(t), \qquad (8)$$

где f(t) – вещественнозначная функция, определенная на положительной полуоси (t>0), $f(\tau) \in C[0,t]$, имеет решение вида

$$Y(t) = Y_f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} Y^{(k)}(0) \cdot t^k \cdot E_{\alpha,k+1}[\lambda \cdot t^{\alpha}], \qquad (9)$$

где n-1<α≤n и

$$Y_f(t) := \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \cdot E_{\alpha,\alpha}[\lambda \cdot (t-\tau)^{\alpha}] \cdot f(\tau)d\tau, \qquad (10)$$

и $Y^{(k)}(t)$ – производная функции Y(t) целого порядка k=0,…,n-1по времени для t=0, $E_{\alpha,\beta}[z]$ – двухпараметрическая функция Миттаг-Леффлера [8 с. 42], определяемая формулой

$$E_{\alpha,\beta}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}. \qquad (11)$$

Видно, что уравнение (7) имеет вид (8), где

$$\lambda = \frac{1-m}{a}, \; f(t) = -\frac{E_b(t)}{a}. \qquad (12)$$

Рассмотрим случай, когда функция независимых расходов является постоянной ($E_b(t) = E_b$). В этом случае выражение (10) имеет вид

$$Y_f(t) = -\frac{E_b}{a} \cdot \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \cdot E_{\alpha,\alpha}\left[\frac{1-m}{a} \cdot (t-\tau)^{\alpha}\right] d\tau. \qquad (13)$$

Используя замену переменной ξ=t-τ, выражение (13) записывается в виде

$$Y_f(t) = -\frac{E_b}{a} \cdot \int_0^t \xi^{\alpha-1} \cdot E_{\alpha,\alpha}\left[\frac{1-m}{a} \cdot \xi^{\alpha}\right] d\xi. \qquad (14)$$

Далее воспользуемся формулой (11), определяющей функцию Миттаг-Леффелера, и, используя почленное интегрирование, вычислим интеграл

$$\int_0^t \xi^{\alpha-1} \cdot E_{\alpha,\alpha}[\lambda \cdot \xi^{\alpha}] d\xi = \frac{1}{\lambda} \cdot \left(E_{\alpha,1}[\lambda \cdot t^{\alpha}] - 1\right), \qquad (15)$$

где будем использовать $\lambda = (1-m)/a$.

В результате получаем решение эредитарного уравнения Кейнса (7) в виде

$$Y(t) = \frac{E_b}{1-m}\left(1 - E_{\alpha,1}\left[\frac{1-m}{a} \cdot t^{\alpha}\right]\right) + \sum_{k=0}^{n-1} Y^{(k)}(0) \cdot t^k \cdot E_{\alpha,k+1}\left[\frac{1-m}{a} \cdot t^{\alpha}\right]. \qquad (16)$$

Это решение описывает экономический рост с памятью об изменениях дохода и инвестиций при постоянном непроизводственном потреблении.

Для 0<α≤1 (n=1) решение (16) имеет вид

$$Y(t) = \frac{E_b}{1-m}\left(1 - E_{\alpha,1}\left[\frac{1-m}{a} \cdot t^{\alpha}\right]\right) + Y(0) \cdot E_{\alpha,1}\left[\frac{1-m}{a} \cdot t^{\alpha}\right]. \qquad (17)$$

Данное выражение задает решение уравнения эредитарного обобщения модели Кейнса при условии постоянства независимых расходов.

Для α=1, используя $E_{\alpha,1}[z] = e^z$, получаем

$$Y(t) = \frac{E_b}{1-m} \cdot \left(1 - \exp\left(\frac{1-m}{a} t\right)\right) + Y(0) \cdot \exp\left(\frac{1-m}{a} t\right). \qquad (18)$$

Это решение в точности совпадает с решением (5), стандартного уравнения Кейнса (4).

Функция Y(t), являющаяся решением (17) уравнения (7) для эредитарной модели Кейнса для α=0.9 представлена графически на рис. 1, где Y(0)=9, $E_b = 2.4$, a=1.2 и m=0.7.

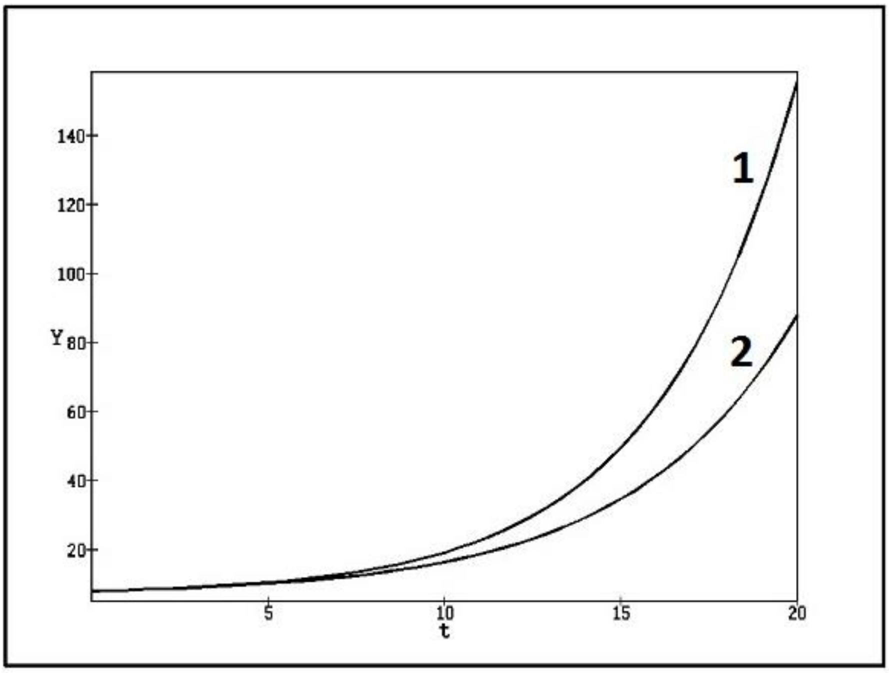

Рис. 1. График 1 – решение (5) уравнения (4) для стандартной модели Кейнса; График 2 – решение (17) уравнения (7) для эредитарной модели Кейнса при α=0.9, где Y(0)=9, $E_b = 2.4$, a=1.2 и m=0.7

Функция Y(t), являющаяся решением (17) уравнения (7) для эредитарной модели Кейнса при α=0.1 представлена графически на рис. 2 для Y(0)=9, $E_b = 2.4$, a=1.2 и m=0.7.

Отличие графика 2 на рис. 2 от графика 2 на рис. 1 лишь в меньшем значении α, являющегося показателем затухания памяти. Видно, что при уменьшении α с 0.9 до 0.1 экономический рост существенно замедляется.

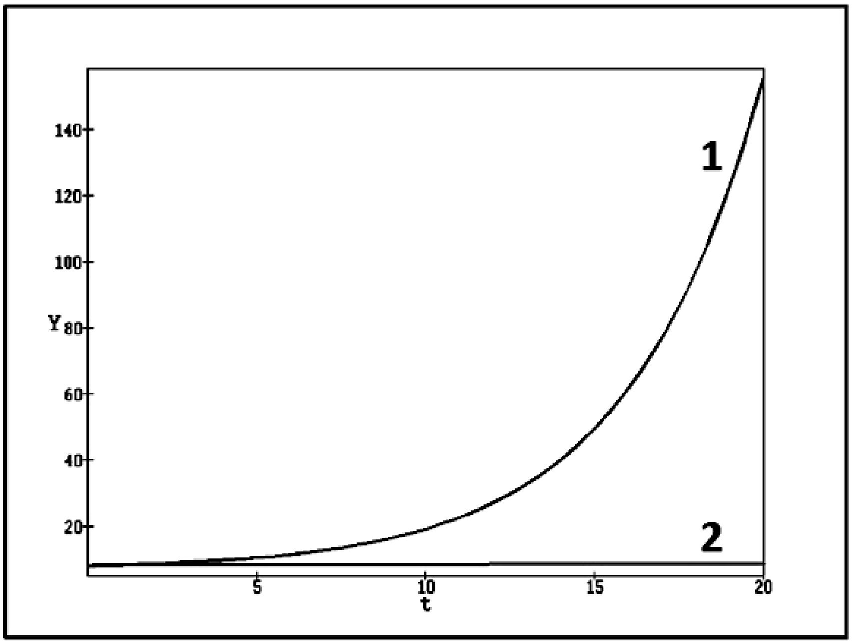

Рис. 2. График 1 – решение (5) уравнения (4) для стандартной модели Кейнса; График 2 – решение (17) уравнения (7) для эредитарной модели Кейнса при α=0.1, где Y(0)=9, $E_b = 2.4$, a=1.2 и m=0.7

Для 1<α≤2 (n=2) решение эредитарного уравнения Кейнса (7) при постоянных независимых расходах $\mathrm{E_b(t) = E_b}$ имеет вид

$$\mathrm{Y(t) = \frac{E_b}{1-m}\left(1 - E_{\alpha,1}\left[\frac{1-m}{a}\cdot t^{\alpha}\right]\right) +}$$
$$\mathrm{+Y(0)\cdot E_{\alpha,1}\left[\tfrac{1-m}{a}\cdot t^{\alpha}\right] + Y^{(1)}(0)\cdot t\cdot E_{\alpha,2}\left[\tfrac{1-m}{a}\cdot t^{\alpha}\right],} \qquad (19)$$

где $\mathrm{Y^{(1)}(0)}$ – значение производной первого порядка функции дохода при t=0, то есть это предельный доход в начальный момент времени.

Функция Y(t), являющаяся решением (19) уравнения (7) для эредитарной модели Кейнса при 1<α≤2 представлена графически на рис. 3, 4 и 5 для Y(0)=9, $\mathrm{E_b = 4.4}$, a=2.2 и m=0.7 при различных значениях предельного дохода в начальный момент времени. Графики на рис. 3, 4 и 5 соответствуют значениям $\mathrm{Y^{(1)}(0) = 0.3}$, $\mathrm{Y^{(1)}(0) = 3}$, $\mathrm{Y^{(1)}(0) = 5}$.

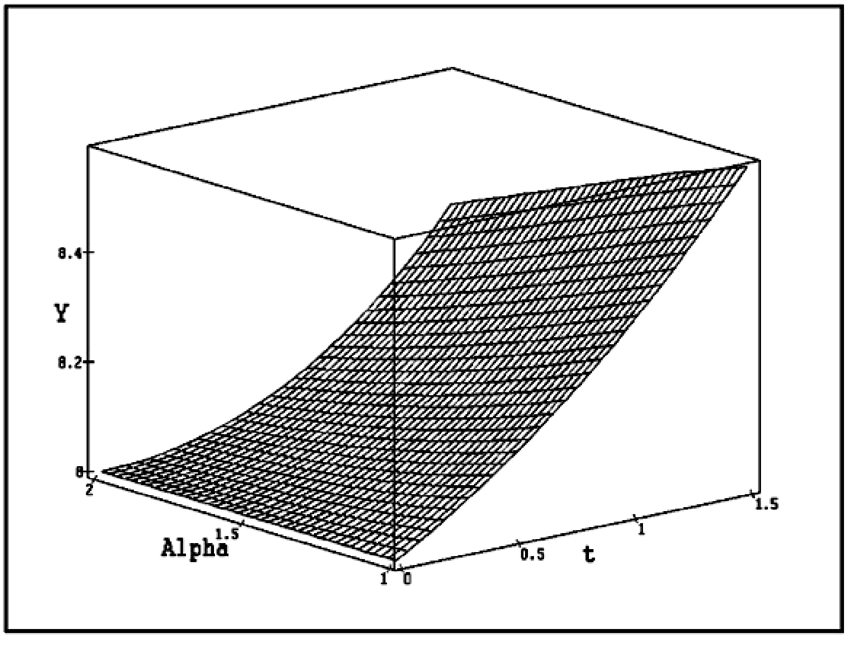

Рис. 3. Решение (19) уравнения (7) для эредитарной модели Кейнса при 1<α≤2, где $Y^{(1)}(0) = 0.3$, и Y(0)=9, $E_b = 4.4$, a=2.2, m=0.7

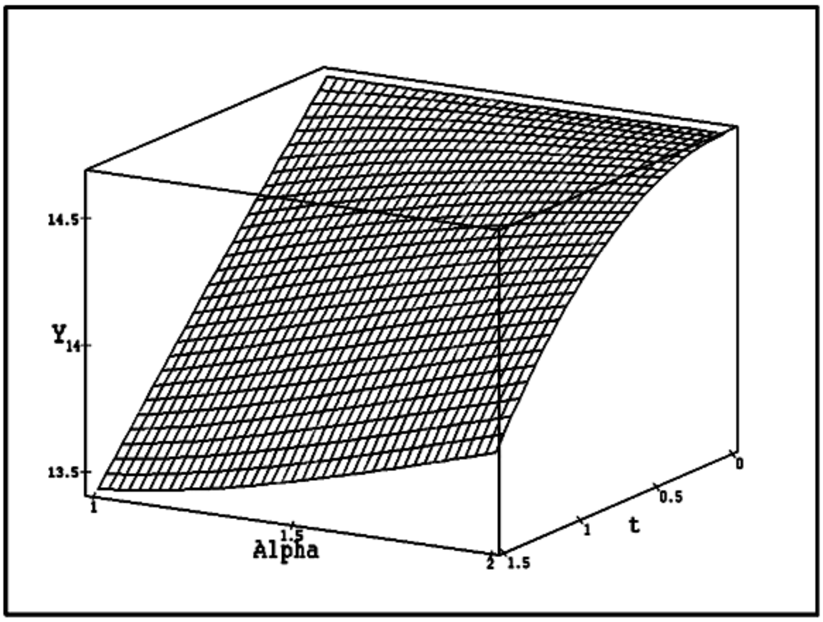

Рис. 4. Решение (19) уравнения (7) для эредитарной модели Кейнса при 1<α≤2, где $Y^{(1)}(0) = 3$, *и Y(0)=9,* $E_b = 4.4$, *a=2.2, m=0.7*

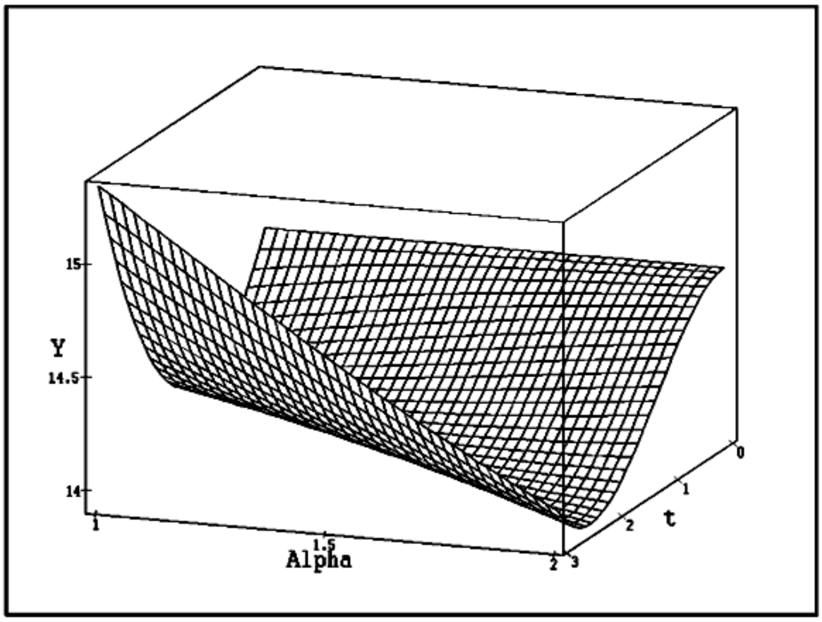

Рис. 5. Решение (19) уравнения (7) для эредитарной модели Кейнса при 1<α≤2, где $Y^{(1)}(0) = 5$, *и Y(0)=9, ,* $E_b = 4.4$, *a=2.2, m=0.7*

Решения (16), (17) и (19) эредитарного уравнения Кейнса (7), учитывающего эффекты динамической памяти, были получены для случая постоянных независимых расходов ($E_b(t) = E_b$). Для непостоянных функций $E_b(t)$, описывающих изменение независимых расходов с течением времени, решение уравнения (7) задается формулой

$$Y(t) = -\frac{1}{a} \cdot \int_0^t \frac{E_b(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} \cdot E_{\alpha,\alpha}\left[\frac{1-m}{a} \cdot (t-\tau)^{\alpha}\right] d\tau + \\ + \sum_{k=0}^{n-1} Y^{(k)}(0) \cdot t^k \cdot E_{\alpha,k+1}\left[\frac{1-m}{a} \cdot t^{\alpha}\right]. \qquad (20)$$

Здесь во многих случаях необходимо использовать численные методы для компьютерного моделирования этого решения, поскольку явные аналитические выражения для интеграла, входящего в формулу (20), известны для узкого класса непостоянных функций $E_b(t)$.

Из полученных решений (17) и (19) уравнения экономического роста (7) эредитарной модели Кейнса и графиков этих решений, представленных на рис. 1-5, видно, что поведение функции дохода существенно зависит от наличия или отсутствия памяти (см. также [11, 12]). Полученные результаты доказывают, что пренебрежение эффектами памяти в экономических моделях, может приводить к качественному изменению результата. В силу этого, при исследованиях экономического роста и построения соответствующих макроэкономических моделей, а также при описании процессов в микроэкономике [5, 6, 7, 13, 14], следует учитывать зависимость экономической динамики от эффектов памяти.

Литература

1. *Кейнс Дж. М.* Общая теория занятости, процента и денег. М.: Прогресс, 1978. 494 с.
2. *Волгина О. А., Голодная Н. Ю., Одияко Н. Н., Шуман Г. И.* Математическое моделирование экономических процессов и систем. 3-е изд. М.: Кронус, 2014. 200 с.
3. *Тарасова В. В., Тарасов В. Е.* Обобщение понятий акселератора и мультипликатора для учета эффектов памяти в макроэкономике // Экономика и предпринимательство, 2016. № 10-3 (75-3). С. 1121-1129.
4. *Tarasova V. V., Tarasov V. E.* Economic accelerator with memory: discrete time approach // Problems of Modern Science and Education, 2016. №. 36 (78). P. 37-42. DOI: 10.20861/2304-2338-2016-78-002.
5. *Тарасова В. В., Тарасов В. Е.* Предельные величины нецелого порядка в экономическом анализе // Азимут Научных Исследований: Экономика и Управление, 2016. № 3 (16). С. 197-201.
6. *Тарасова В. В., Тарасов В. Е.* Предельная полезность для экономических процессов с памятью // Альманах современной науки и образования, 2016. № 7 (109). С. 108–113.
7. *Тарасова В. В., Тарасов В. Е.* Экономический показатель, обобщающий среднюю и предельную величины // Экономика и предпринимательство, 2016. № 11-1 (76-1). С. 817-823.
8. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam: Elsevier, 2006. 540 p.
9. *Tarasova V. V., Tarasov V. E.* Economic interpretation of fractional derivatives // Progress in Fractional Differentiation and Applications, 2017. Vol. 3. № 1. P. 1-7. DOI: 10.18576/pfda/030101.
10. *Тарасова В. В., Тарасов В. Е.* Кейнсианская модель экономического роста с памятью // Экономика и управление: проблемы, решения, 2016. № 10-2 (58). С. 21-29.
11. *Тарасова В. В., Тарасов В. Е.* Эредитарное обобщение модели Харрода-Домара и эффекты памяти // Экономика и предпринимательство, 2016. № 10-2 (75-2). С. 72-78.
12. *Тарасова В. В., Тарасов В. Е.* Эффекты памяти в эредитарной модели Харрода—Домара // Проблемы современной науки и образования, 2016. № 32 (74). С. 38-44. DOI: 10.20861/2304-2338-2016-74-002
13. *Tarasova V. V., Tarasov V. E.* Elasticity for economic processes with memory: fractional differential calculus approach // Fractional Differential Calculus, 2016. Vol. 6. № 2. P. 219-232. DOI: 10.7153/fdc-06-14
14. *Tarasov V. E., Tarasova V. V.* Long and short memory in economics: fractional-order difference and differentiation // IRA-International Journal of Management and Social Sciences, 2016. Vol. 5. № 2. P. 327-334. DOI: 10.21013/jmss.v5.n2.p10.