Memory effects in hereditary Harrod-Domar model

Tarasova V.[1], Tarasov V.[2]

Эффекты памяти в эредитарной модели Харрода—Домара

Тарасова В. В.[1], Тарасов В. Е.[2]

[1]Тарасова Валентина Васильевна / Tarasova Valentina – магистрант,
Высшая школа бизнеса;
[2]Тарасов Василий Евгеньевич / Tarasov Vasily – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник,
Научно-исследовательский институт ядерной физики имени Д. В. Скобельцына,
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, г. Москва

Аннотация: *в данной статье рассматривается обобщение модели Харрода-Домара, учитывающее эффекты затухающей памяти. Используя математический аппарат производных нецелого порядка, получаются уточненные решения уравнения эредитарного обобщения модели Харрода-Домара. Приводятся примеры зависимости экономической динамики от эффектов памяти.*

Abstract: *this article discusses the generalization of Harrod-Domar model, which takes into account the effects of fading memory. Using the mathematical tool of the derivatives of non-integer order, we obtain solutions of the equation of the hereditarity generalization of Harrod-Domar model. Examples of dependence of economic dynamics of the memory effects are suggested.*

Ключевые слова: *макроэкономика, модель экономического роста, модель Харрода—Домара, эредитарность, эффекты памяти, производные нецелого порядка.*

Keywords: *macroeconomics, economic growth model, Harrod-Domar model, hereditarity, memory effects, derivatives of non-integer order.*

Одной из простейших моделей экономического роста является модель Харрода-Домара [1, с. 75-78], объединяющая результаты Харрода [11, 12, 15] и Домара [13, 14]. Модель Харрода-Домара с непрерывным временем описывает изменение дохода *Y(t)*, который определяется суммой непроизводственного потребления *C(t)* и инвестиций *I(t).* В результате уравнение баланса данной модели имеет вид

$$Y(t) = C(t) + I(t). \qquad (1)$$

В модели Харрода-Домара непроизводственное потребление *C(t)* рассматривается как функция, не зависящая от дохода и инвестиций. В силу этого, она может быть как постоянной во времени, так и изменяться с течением времени. Если непроизводственное потребление *C(t)* описывается как фиксированная часть дохода *C(t)=(1-m)Y(t)*, где m – норма инвестиций, то модель Харрода-Домара совпадает с моделью естественного роста [2, с. 90-95].

В модели Харрода-Домара предполагается, что зависимость между инвестициями и предельным доходом (скоростью роста дохода) описывается прямой пропорциональностью, то есть выполняется уравнение акселератора

$$I(t) = B \cdot \frac{dY(t)}{dt}, \qquad (2)$$

где множитель *B* интерпретируется как коэффициент капиталоемкости прироста доходов. Модель Харрода—Домара описывает рост экономики при условии постоянства коэффициента капиталоемкости *B*. Формула (2) предполагает, что предельный доход меняется мгновенно при изменении инвестиций, то есть эффекты запаздывания и памяти не учитываются.

Подстановка (2) в уравнение баланса (1) приводит к дифференциальному уравнению модели Харрода-Домара

$$\frac{dY(t)}{dt} - b \cdot Y(t) = -b \cdot C(t). \qquad (3)$$

Для постоянной функции потребления (*C(t)=C*) решение уравнения (3) имеет вид

$$Y(t) = C \cdot (1 - e^{b \cdot t}) + Y(0) \cdot e^{b \cdot t}. \qquad (4)$$

Решения (4) уравнения (3) описывают динамику экономического роста для постоянной величины потребления, при условии, что зависимость между инвестициями и предельным доходом задается формулой (2), предполагающей отсутствие запаздывания и эффектов памяти.

Использование понятий акселератора с памятью и мультипликатора с памятью, предложенные в работе [4], позволяет строить модели экономического роста, учитывающие эффекты памяти [3, 7, 8, 9, 17]. В статье [10] было предложено обобщение модели Харрода—Домара, учитывающее эффекты динамической памяти со степенным затуханием. Некоторые решения, приведенные в статье [10], содержат лишний множитель (гамма-функцию от показателя затухания памяти). В данной работе предлагаются исправленные решения уравнений эредитарной модели Харрода-Домара, описывающие зависимость динамики экономики от эффектов памяти, и строятся соответствующие графики зависимости дохода от времени и показателя затухания памяти.

Для того чтобы учесть эффекты памяти в моделях Харрода-Домара, необходимо воспользоваться обобщением формулы (2), описывающей взаимосвязь между инвестициями и предельной величиной дохода (скоростью роста дохода). Используя понятие предельной (маржинальной) величины нецелого порядка, предложенное в работе [5, 6], получаем уравнение акселератора с памятью [4, 10]. В случае степенного затухания памяти, уравнение акселератора с памятью записывается в виде

$$I(t) = B \cdot (D^{\alpha}_{0+}Y)(t), \qquad (5)$$

где $(D^{\alpha}_{0+}Y)(t)$ – производная Капуто [16, 17] порядка $\alpha \geq 0$, определяемая формулой

$$(D^{\alpha}_{0+}Y)(t) := \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{Y^{(n)}(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}, \qquad (6)$$

где $\Gamma(\alpha)$ – гамма функция, $Y^{(n)}(\tau)$ – производная целого порядка $n:=[\alpha]+1$ функции $Y(\tau)$ по переменной τ: $0<\tau<t$. Здесь предполагается, что функция $Y(\tau)$ имеет производные вплоть до $(n-1)$ порядка, которые являются абсолютно непрерывными функциями на интервале $[0,t]$.

Подставив выражение для $I(t)$ из формулы (5) в уравнение баланса (1), получим обобщение уравнения (3) модели Харрода-Домара в виде

$$(D^{\alpha}_{0+}Y)(t) - b \cdot Y(t) = -b \cdot C(t). \qquad (7)$$

где $b=1/B$. Это неоднородное дифференциальное уравнение с производными нецелого порядка. Уравнение (7) учитывает эффекты степенной памяти с показателем затухания $\alpha \geq 0$.

Для решения уравнения (7) воспользуемся следующим утверждением [16, с. 323]: *Если $f(t)$ – непрерывная вещественнозначная функция, определенная на положительной полуоси ($t>0$), тогда дробное дифференциальное уравнение*

$$(D^{\alpha}_{0+}Y)(t) - \lambda \cdot Y(t) = f(t), \qquad (8)$$

где $n-1<\alpha \leq n$, имеет единственное решение

$$Y(t) = Y_f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} Y^{(k)}(0) \cdot t^k \cdot E_{\alpha,k+1}[\lambda \cdot t^{\alpha}], \qquad (9)$$

где $Y^{(k)}(0)$ – производные целого порядка k функции $Y(t)$,

$$Y_f(t) := \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \cdot E_{\alpha,\alpha}[\lambda \cdot (t-\tau)^{\alpha}] \cdot f(\tau)d\tau, \qquad (10)$$

где $E_{\alpha,\beta}[z]$ – двухпараметрическая функция Миттаг-Леффлера, определяемые выражением

$$E_{\alpha,\beta}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}. \qquad (11)$$

Видно, что уравнение (7) представимо в виде (8), где $\lambda=b$ и $f(t) = -b \cdot C(t)$. Для $0<\alpha\leq 1$ ($n=1$) решение уравнения (7) имеет вид

$$Y(t) = -b \cdot \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}[b(t-\tau)^{\alpha}] C(\tau)d\tau + Y(0)E_{\alpha,1}[bt^{\alpha}]. \qquad (12)$$

Отметим, что выражение (12) может быть записано в виде

$$Y_f(t) := \int_0^t \tau^{\alpha-1} \cdot E_{\alpha,\alpha}[\lambda \cdot \tau^{\alpha}] \cdot f(t-\tau)d\tau. \qquad (13)$$

Рассмотрим случай постоянной функции потребления ($C(t)=C$). В этом случае выражение $Y_f(t)$, задаваемое уравнением (12) с $f(t) = -b \cdot C(t)$ и $\lambda=b$, принимает вид

$$Y_C(t) = -b \cdot C \cdot \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \cdot E_{\alpha,\alpha}[b \cdot (t-\tau)^{\alpha}]d\tau. \qquad (14)$$

Используя замену переменной $\xi=t-\tau$, выражение (14) записывается в виде

$$Y_C(t) = -b \cdot C \cdot \int_0^t \xi^{\alpha-1} \cdot E_{\alpha,\alpha}[b \cdot \xi^{\alpha}]d\xi. \qquad (15)$$

Воспользуемся теперь формулой (11), определяющей функцию Миттаг-Леффелера, и методом почленного интегрирования вычисляем интеграл

$$\int_0^t \xi^{\alpha-1} \cdot E_{\alpha,\alpha}[b \cdot \xi^{\alpha}]d\xi = \frac{1}{b} \cdot \left(E_{\alpha,1}[b \cdot t^{\alpha}] - 1\right). \qquad (16)$$

Используя (16), выражение (14) можно записать в виде

$$Y_C(t) := -C \cdot (E_{\alpha,1}[b \cdot t^{\alpha}] - 1) \qquad (17)$$

В результате решение уравнения (7) имеет вид

$$Y(t) = C \cdot (1 - E_{\alpha,1}[b \cdot t^{\alpha}]) + \sum_{k=0}^{n-1} Y^{(k)}(0) \cdot t^k \cdot E_{\alpha,k+1}[b \cdot t^{\alpha}]. \qquad (18)$$

Решение (18) описывает экономический рост с затухающей памятью об изменениях дохода и инвестиций при постоянном непроизводственном потреблении.

Для $0<\alpha\leq 1$ ($n=1$) решение (18) имеет вид

$$Y(t) = C \cdot (1 - E_{\alpha,1}[b \cdot t^{\alpha}]) + Y(0) \cdot E_{\alpha,1}[b \cdot t^{\alpha}]. \qquad (19)$$

Для $\alpha=1$, используя $E_{\alpha,1}[z] = e^z$, получаем решение

$$Y(t) = C \cdot (1 - e^{bt}) + Y(0) \cdot e^{bt} \qquad (20)$$

которое в точности совпадает с решением (4) стандартной модели (3).

Решение (20) уравнения (7) описывает экономический рост в рамках стандартной модели Харрода-Домара с постоянным потреблением. Решения (18) и (19) уравнения (7) соответствуют эредитарной модели экономического роста, учитывающей наличие у экономических агентов памяти об изменениях дохода и инвестиций на конечном интервале времени [0,t] при постоянном потреблении.

Решения (19) с α=0.7 и α=0.3 в сравнении с решением (20), то есть выражением (19) с α=1.0, представлены графически на рис. 1 и 2 для C=1.4, Y(0)=1.5, и $b = 0.3$.

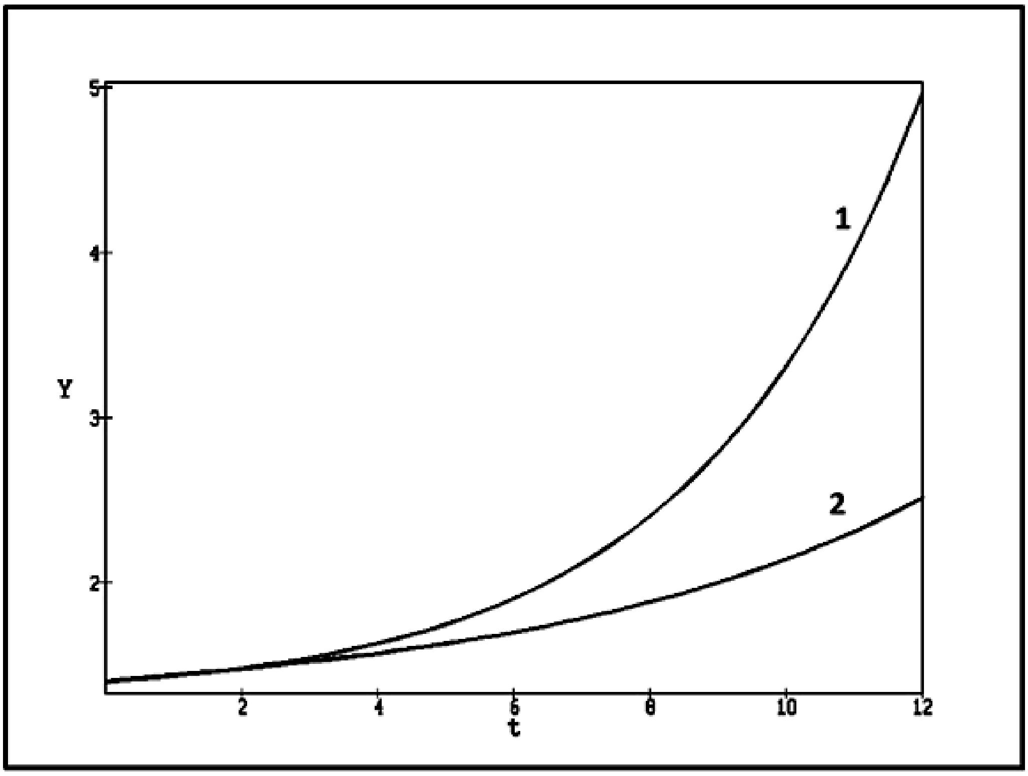

Рис. 1. Функции Y=Y(t), являющиеся решением уравнения (20) для стандартной модели Харрода-Домара (график 1) и решением уравнения (19) для эредитарной модели экономического роста (график 2) для α=0.7, где C=1.4, Y(0)=1.5, и $b = 0.3$

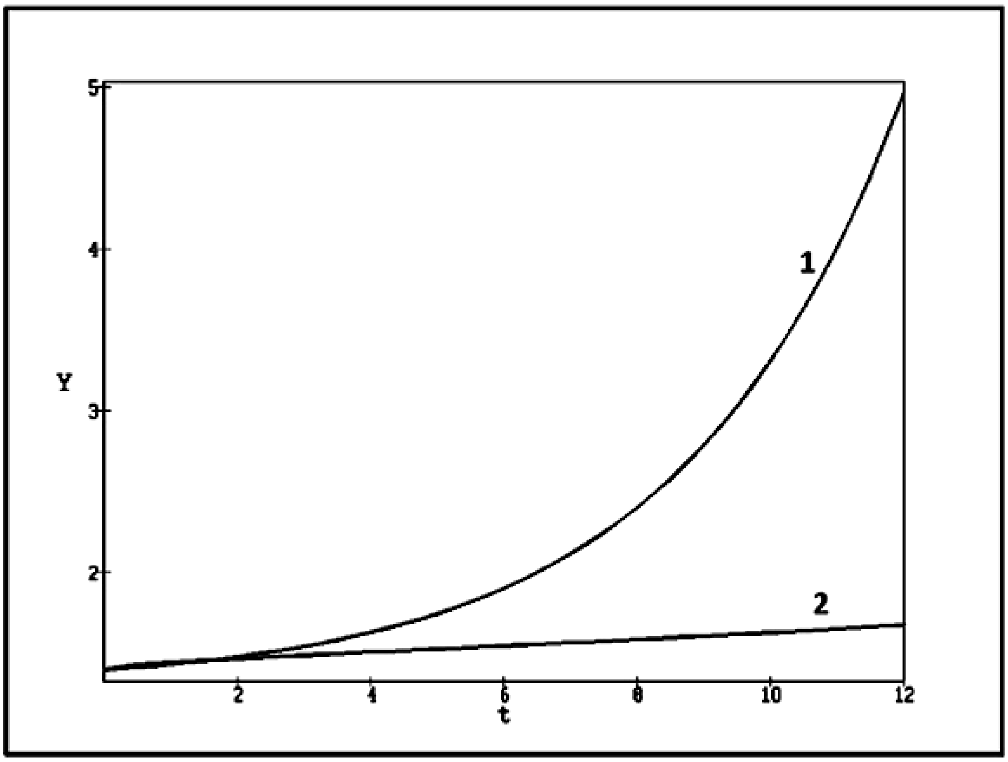

Рис. 2. Функции Y=Y(t), являющиеся решением уравнения (20) для стандартной модели Харрода-Домара (график 1) и решением уравнения (19) для эредитарной модели экономического роста (график 2) для α=0.3, где C=1.4, Y(0)=1.5, и $b = 0.3$

Для 1<α≤2 (*n*=2) решение (18) уравнения (7) имеет вид

$$Y(t) = C(1 - E_{\alpha,1}[bt^{\alpha}]) + Y(0)E_{\alpha,1}[b \cdot t^{\alpha}] + Y^{(1)}(0)tE_{\alpha,2}[bt^{\alpha}]. \qquad (21)$$

Решения (21) с α=1.1 в сравнении с решением (20) представлены графически на рис. 3 для *C*=1.4, *Y(0)*=1.5, $Y^{(1)}(0) = 0.4$, $b = 0.3$ и на рис. 4 для *C*=1.4, *Y(0)*=1.3, $Y^{(1)}(0) = 0.1$, $b = 0.2$.

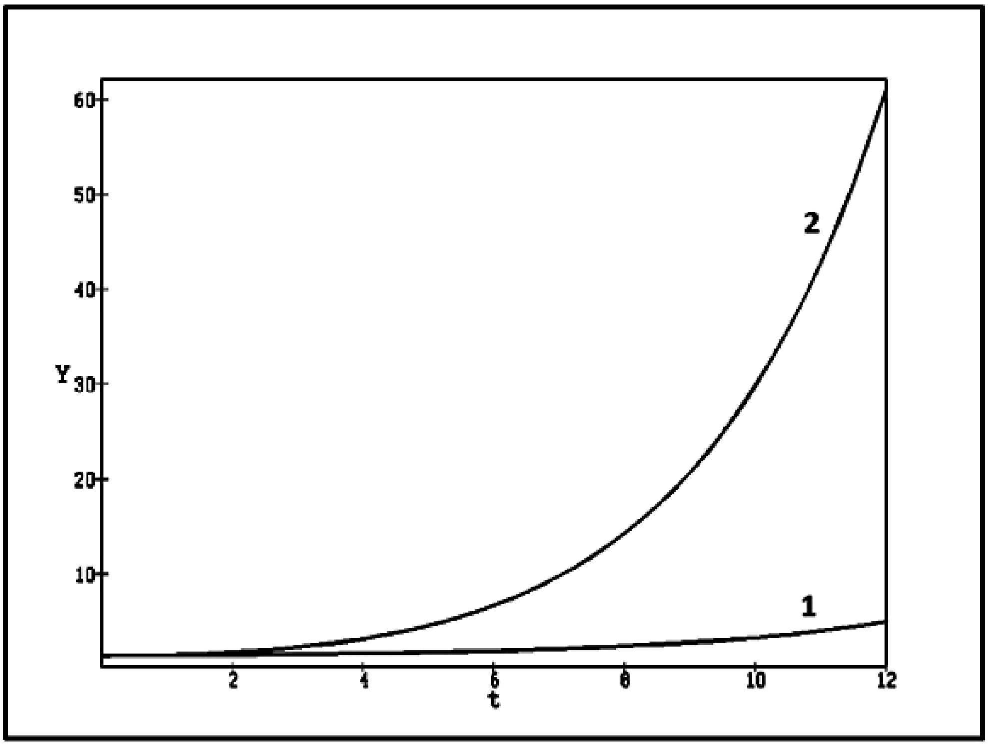

Рис. 3. Функции Y=Y(t), являющиеся решением уравнения (20) для стандартной модели Харрода-Домара (график 1) и решением уравнения (21) для эредитарной модели экономического роста (график 2) для α=1.1, где C=1.4, Y(0)=1.5, $Y^{(1)}(0) = 0.4$ *и* $b = 0.3$

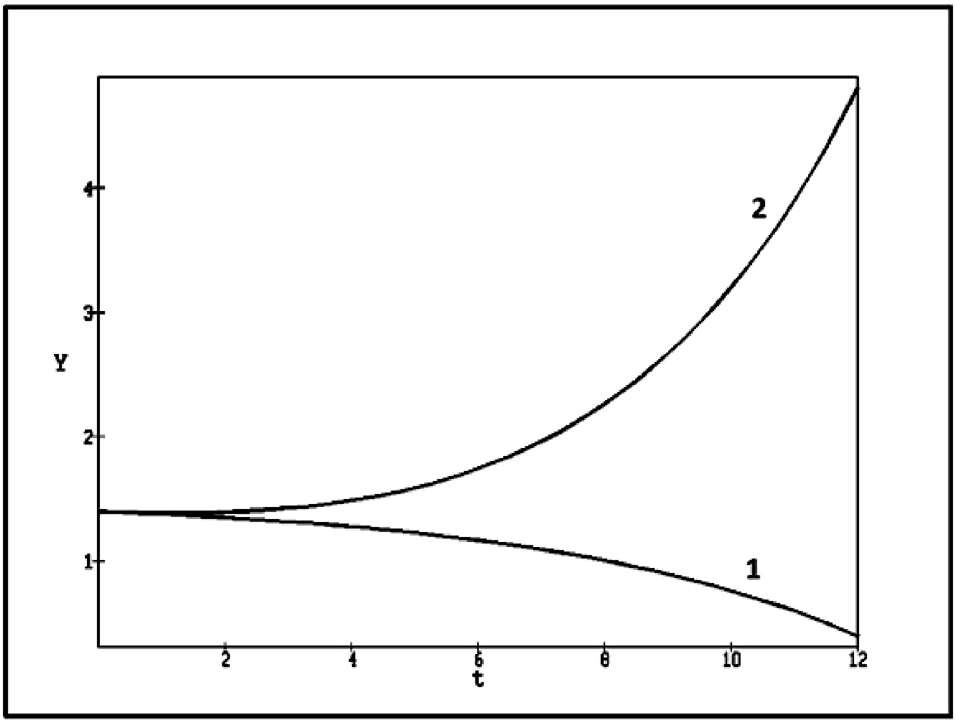

Рис. 4. Функции Y=Y(t), являющиеся решением уравнения (20) для стандартной модели Харрода-Домара (график 1) и решением уравнения (21) для эредитарной модели экономического роста (график 2) для α=1.1, где C=1.4, Y(0)=1.3, $Y^{(1)}(0) = 0.1$ *и* $b = 0.2$

Решение (19) как функция t и α представлено графически на рис. 5 для C=0.3, Y(0)=2.2, и $b = 0.3$. Решение (21) как функция t и α представлено графически на рис. 6 для C=1.2, Y(0)=1.1, $Y^{(1)}(0) = 0.4$, и $b = 0.7$.

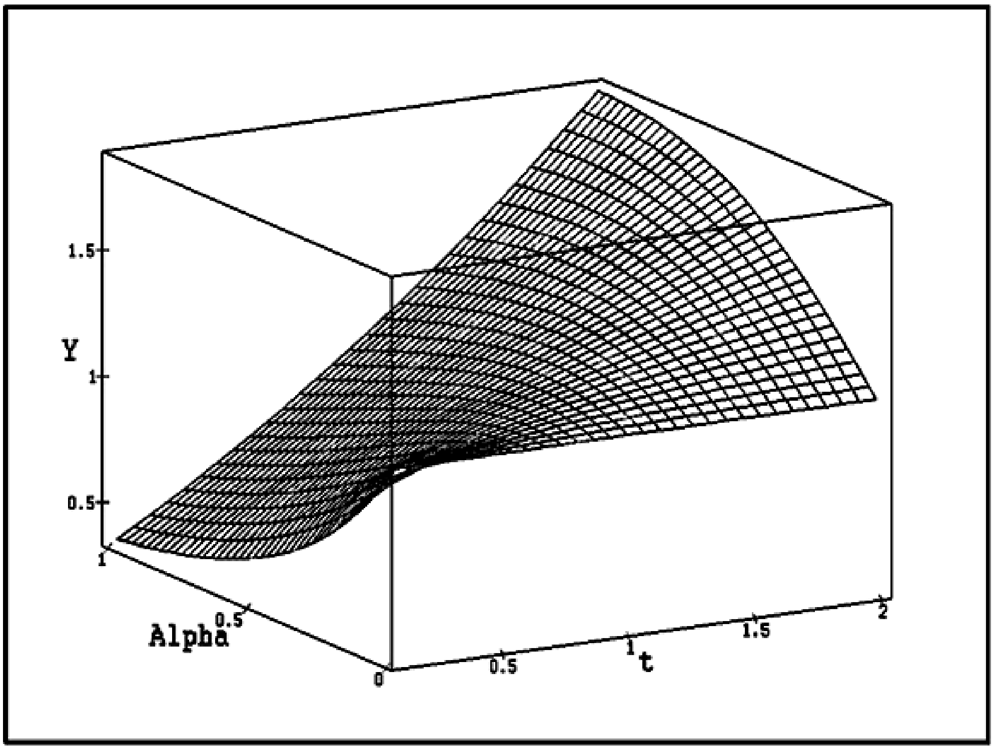

Рис. 5. Функция Y=Y(t), являющаяся решением уравнения (19) для эредитарной модели экономического роста, как функция t и α, для C=0.3, Y(0)=2.2, и $b = 0.3$

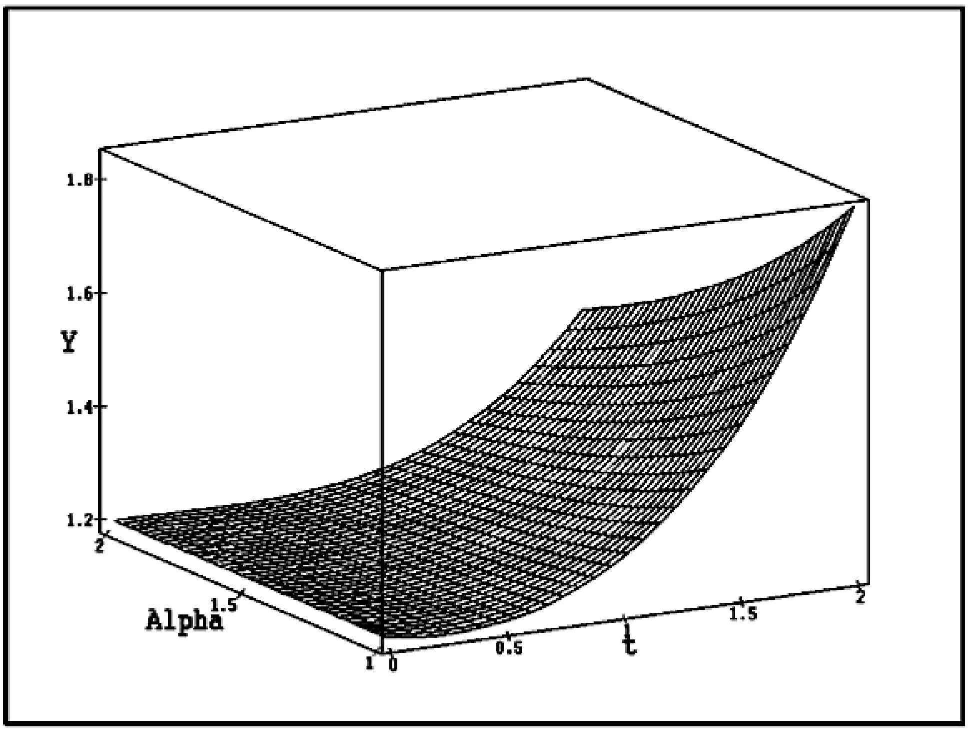

Рис. 6. Функция Y=Y(t), являющаяся решением уравнения (21) для эредитарной модели экономического роста, как функция t и α, для C=1.2, Y(0)=1.1, $Y^{(1)}(0) = 0.4$, *и* $b = 0.7$

Из рис. 1 - 6 видно, что поведение функции дохода существенно зависит от наличия или отсутствия эффектов памяти. Полученные результаты доказывают, что пренебрежение эффектами памяти может приводить к неправильным результатам. При исследованиях экономической динамики и построении макроэкономических моделей, следует учитывать зависимость экономического роста от эффектов памяти.

Литература

1. *Аллен Р.* Математическая экономия. М.: Изд-во иностранной литературы, 1963. 670 с.
2. *Волгина О. А., Голодная Н. Ю., Одияко Н. Н., Шуман Г. И.* Математическое моделирование экономических процессов и систем. 3-ие изд. М.: Кронус, 2014. 200 с.
3. *Тарасова В. В., Тарасов В. Е.* Критерии эредитарности экономического процесса и эффект памяти // Молодой ученый, 2016. № 14 (118). С. 396–399.
4. *Тарасова В. В., Тарасов В. Е.* Обобщение понятий акселератора и мультипликатора для учета эффектов памяти в макроэкономике // Экономика и предпринимательство, 2016. № 10-3 (75-3). С. 1121-1129.
5. *Тарасова В. В., Тарасов В. Е.* Предельные величины нецелого порядка в экономическом анализе // Азимут Научных Исследований: Экономика и Управление, 2016. № 3 (16). С. 197-201.
6. *Тарасова В. В., Тарасов В. Е.* Предельная полезность для экономических процессов с памятью // Альманах современной науки и образования, 2016. № 7 (109). С. 108–113.
7. *Тарасова В. В., Тарасов В. Е.* Ценовая эластичность спроса с памятью // Экономика, социология и право, 2016. № 4–1. С. 98–106.
8. *Тарасова В. В., Тарасов В. Е.* Экономические индикаторы: неоднозначность и эффекты памяти // Экономика. Управление. Право, 2016. № 3 (66). С. 3-5.
9. *Тарасова В. В., Тарасов В. Е.* Эластичность внебиржевого кассового оборота валютного рынка РФ // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. 2016. № 7–1 (90). С. 207–215.
10. *Тарасова В. В., Тарасов В. Е.* Эредитарное обобщение модели Харрода-Домара и эффекты памяти // Экономика и предпринимательство, 2016. № 10-2 (75-2). С. 72-78.
11. *Харрод Р. Ф.* К теории экономической динамики. М.: Гелиос АРВ, 2011. 160 с.
12. *Харрод Р. Ф.* Теория экономической динамики. Пер. с англ. М.: ЦЭМИ РАН, 2008. 210 с.
13. *Domar E. D.* Capital Expansion, Rate of Growth and Employment // Econometrica. 1946. Vol. 14. № 2. P. 137-147.
14. *Domar E. D.* Expansion and Employment // The American Economic Review, 1947. Vol. 37. № 1. P. 34-55.
15. *Harrod R.* An Essay in Dynamic Theory // Economic Journal, 1939. Vol. 49 (193). P. 14-33.
16. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam: Elsevier, 2006. 540 p.
17. *Tarasova V. V., Tarasov V. E.* Elasticity for economic processes with memory: Fractional differential calculus approach // Fractional Differential Calculus, 2016. Vol. 6. № 2. P. 219-232.