About the formation of the general theory of trigonometric functions and operations on trigonometric equations

Namazov A.

О формировании общей теории тригонометрических функций и операции над тригонометрическими уравнениями

Намазов А. И.

Намазов Агалар Идрис оглы / Namazov Agalar - учитель, докторант,
кафедра общей математики,
Гянджинский государственный университет, г. Гянджа, Азербайджанская Республика

Аннотация: *в данной работе рассмотрены формирование общей теории тригонометрических функций и операции на тригонометрических уравнениях. Для решения многих важных задач, как теоретических, так и в особенности прикладных, тригонометрические функции являются важным инструментом. Тригонометрия вместе с геометрией начинали свой путь с решения практических задач.*

Abstract: *in this work we examined: On the formation of the general theory of trigonometric functions and operations on trigonometric equations. To solve many important problems, both theoretical and applied features, trigonometric functions are an important tool. Trigonometry with geometry began their journey to solve practical problems.*

Ключевые слова: *тригонометрия, функция, четность, тригонометрические ряды, формулы приведения, периодичность, уравнения, система.*

Keywords: *trigonometric, function, parity, trigonometric series, reduction formulas, periodicity, equation, system.*

Что такое тригонометрия? В современной нам структуре математических наук тригонометрия определяется как та их часть, где исследуют один из классов аналитических функций, называемых тригонометрическими, а также их приложения. Эти функции чаще всего вводятся с помощью специальной конструкции — порождающей окружности. В качестве своих аргументов они могут иметь как действительные, так и комплексные величины, что придает им высокую степень общности. Их специфические свойства: периодичность, четность или нечетность и др. позволяют с помощью формул приведения и иных формул существенно упрощать и облегчать операции с ними.

Тригонометрические функции связаны со многими другими классами функций, например с показательными (в случае комплексного аргумента):

$$e^{\pm iz} = \cos z \pm i \sin z \text{, откуда: } \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\text{Sin } z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad (1)$$

Их оперативную значимость усиливает то обстоятельство, что они могут быть представлены в виде степенных рядов или бесконечных произведений.

Для решения многих важных задач, как теоретических, так и в особенности прикладных, тригонометрические функции являются важным инструментом. Значительную роль они играют, например, при изучении явлений, обладающих свойством периодичности (скажем, повторяемости во времени). Таково, в частности, движение, в котором путь x изменяется в зависимости от времени по закону: x — a cos ($\omega t + \varphi$). Подобное движение называется гармоническим колебанием, α называется амплитудой, ω частотой, а φ — начальной фазой. Вследствие того что синусы и косинусы кратных аргументов образуют полную ортогональную систему, оказывается возможным представлять произвольные периодические колебания как суммы гармонических колебаний различных частот и выражать их с помощью аппарата тригонометрических рядов. Раздел математики, посвященный разложениям функций в тригонометрические ряды и интегралы, входит в гармонический анализ,. составляя важную его часть [6].

В геометрической своей части тригонометрия является той математической дисциплиной, где изучают соотношения между сторонами и углами геометрических фигур. В зависимости от того, где расположены фигуры, на плоскости или на сфере, тригонометрия делится на плоскую и сферическую. Формулы сферической тригонометрии находят широкое применение в астрономии.

К нашему времени структура тригонометрии сделалась весьма разветвленной, а связи с другими разделами математики — многообразными и взаимопроникающими. Поэтому все чаше отходят от первоначального смысла термина тригонометрия или даже перестают использовать эти очевидным образом устаревшие, но сохраняющиеся в силу исторических традиций термины.

Впервые тригонометрические функции появляются в курсе планиметрии, тотчас после теоремы Пифагора или непосредственно перед ней. Используются они преимущественно для решения плоских треугольников. При этом отрабатываются начальные навыки работы с таблицами тригонометрических функций.

Во второй раз тригонометрические функции определяются с помощью производящей окружности. Постепенно переходят к рассмотрению тригонометрических функций любого аргумента, выраженного в радианах, и соотношений между ними. Школьников обучают строить графики функций. Вводят понятие производной от тригонометрических функций.

Затем переходят к решению тригонометрических уравнений и неравенств. В тесной связи с преподаванием физики освещают вопрос о гармонических колебаниях, о дифференциальных уравнениях, описывающих их, и о том, что решения этих уравнений выражаются через тригонометрические функции.

Тригонометрия вместе с геометрией начинали свой путь с решения практических задач.

Все древние цивилизации вносили свой вклад в дело накопления тригонометрических знаний. История математической науки дает тому немало убедительных примеров. На одной из глиняных табличек из Древнего Вавилона, возраст которой определяют вторым тысячелетием до нашей эры, решается задача: вычислить длину *s* хорды круга, исходя из величины *(d)* диаметра и высоты (а) сегмента, отсекаемого этой хордой. Описание задачи и правила ее решения таковы, что в них можно заметить использование подобия треугольников и теоремы Пифагора. В привычной нам символике этот способ может быть описан формулами:

$$s=\sqrt{d^2-(d-2a)^2}\ , \qquad a=\frac{1}{2}\left(d-\sqrt{d^2-s^2}\right) \qquad (2)$$

Многие сочинения древнегреческих математиков содержали элементы тригонометрии. Например, в трактате Архимеда «Измерение круга» приведена лемма: «Если вписанный в дугу окружности сломанный на две неравные части отрезок прямой принимает опущенный на него из середины дуги перпендикуляр, то этот перпендикуляр разделит всю сломанную линию пополам». Это, почти очевидно, дает возможность вычислять хорды суммы и разности двух заданных дуг. В сочинениях типа евклидовых «Начал», где авторы избегают рассуждений метрического, измерительного характера, содержится, разумеется, меньше элементов тригонометрии, хотя и здесь их не столь уж трудно обнаружить и интерпретировать. Например, во второй книге «Начал» теоремы 12 в 13 по существу эквивалентны теореме косинусов.

Наибольшее внимание ученых тех давних времен привлекли, однако, тригонометрические соотношения не на плоскость, а на сферу. Это было продиктовано нуждами астрономии и географии. Дело в том, что преобладающей гипотезой о строении вселенной была геоцентристская. Согласно этой гипотезе, Земля расположена в центре небесной сферы, которая равномерно вращается вокруг своей оси. Светила, расположенные на этой сфере, движутся по ней. Естественно, что математические задачи о расположении точек и фигур на сферах и об их перемещениях приобрели превалирующее значение [7].

При вычислениях Птолемей пользовался 60-ричной системой счисления. Для регулярности в вычислениях I и для удобства он делил окружность на 880 равных частей (градусов), диаметр — на 120 частей, с последующим более дробным делением градусов на минуты, секунды, терции и т. д. Вначале он определял длины хорд, являющихся сторонами правильных вписанных в окружность многоугольников с 3, 4, 5, 6, 10 сторонами.

Чтобы из этих «опорных» значений получать значения других (а в конечном счете любых) хорд, у Птолемея были выведены соотношения, эквивалентные:

а) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ (для вычисления хор г дополнительных углов);

б) $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$ (роль этого соотношения играл частный случай теоремы Птолемея).

Кроме этого в сочинении используется способ нахождения хорд для половины заданного угла и соотношение, эквивалентное

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2} \qquad (3)$$

Этих результатов оказалось достаточно, чтобы составить таблицу значений хорд для углов от Г° до 180‘ с частотой в полградуса, что соответствует таблице синусов углов первой четверти с частотой в четверть градуса. Позднейшие проверки показали, что таблица оказалась точной до пятого десятичного знака включительно.

О формировании общей теории тригонометрических функций. Содержание тригонометрии, равно как и средства ее аналитического выражения (аналитический аппарат), достигли состояния, близкого к современному, около 200 лет тему назад, во второй половине XVIII в. Сущность произведенных в то время преобразований состояла в радикальной перестройке тригонометрии на алгебраическо-аналитический основе, позволяющей ей сделаться важной частью) математического анализа. Решающая роль в этой перестройке принадлежит Л. Эйлеру (1707—1783). Свою теорию тригонометрических функций он изложил в 8-й главе 1 тома своей книги «Введение в анализ бесконечных» (1748 г.; издание на русском языке—1961 г.), завершив тем самым более или менее успешные попытки своих ближайших предшественников.

Л. Эйлер ввел в тригонометрию практически совпадающую с привычной нам символику, полностью разъяснил вопрос о знаках всех тригонометрических функций любого аргумента. Тригонометрические функции он рассматривал как безразмерные числа, называя их общим термином: «трансцендентные количества, получающиеся из круга». Ход рассуждений Эйлера, вводящих тригонометрические функции в общую систему аналитических функций, был примерно таков: [4]

1. С помощью формул приведения для

$$\text{Sin}\,(\kappa\cdot\frac{\pi}{2}+z)\ \text{ и } \cos\,(\kappa\cdot\frac{\pi}{2}+z) \qquad (4)$$

при целых κ выясняется вопрос о знаках тригонометрических функций любых дуг.

2. На основе теорем о синусах и косинусах суммы и разности аргументов выводится формула Муавра/для натурального показателя:

$$(\cos z \pm i\, sin\, z)^{\pi} = \cos nz \pm i \sin nz \qquad (5)$$

3. Из этой формулы Эйлер получает:

$$\cos nz = \frac{(\cos z + i\sin z)^n - (\cos z - i\sin z)^n}{2}$$

$$\sin nz = \frac{1}{2i}(\cos z + i \sin z)^n - (\cos z - i \sin z)^n),$$

а затем:

$$\cos nz = \cos^n z - \frac{n(n-1)}{21}\cos^{n-2} z\sin^2 z + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{41}\cos^{n-4} z\sin z - ...$$

$$\sin nz = \frac{n}{1}\cos^{n-1} z\sin - \frac{n(n-1)(n-2)}{31}\cos^{n-3} z\sin^{3z} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)()n-4}{51}\cos^{n-5} z\sin^5 z - ...$$

4. Эйлер полагает в полученных формулах я —бесконечно большим, г — бесконечно малым, налагает условие: *пг = и,* т. е, конечное, а также

$$\cos z = 1; \quad \sin z \approx z = \frac{\upsilon}{n}$$

и получает разложения тригонометрических функций в ряды:

$$\cos \upsilon = 1 - \frac{\upsilon^2}{21} + \frac{\upsilon^4}{41} - ....$$

$$\sin \upsilon = \upsilon - \frac{\upsilon^2}{31} + \frac{\upsilon^4}{51} - ....$$

Тем самым в развитии и тригонометрии был сделан очень важный шаг.

При решении тригонометрических уравнений часто получается несколько серий ответов. В некоторых случаях запись ответа можно делать более компактной, если объединить в одно множество получившиеся серии, хотя это делать и необязательно. Для выработки соответствующих навыков можно предложить упражнения на нахождение объединения множеств [8]:

Пусть получены серии $x = \frac{\pi}{6} + \pi\kappa$ и $x = \frac{2}{3}\pi + +\pi\kappa$. Запишем их так: $x = \frac{\pi}{6} + 1(6\kappa + 1)$ и $x = \frac{\pi}{6}(6\kappa + 4)$. Объединяя эти множества, получим

$$X = \frac{\pi}{6}(3k+1).$$

Рассмотрим примеры тригонометрических уравнений, при решении которых приходится находить пересечение множеств.

$$1.\ \sin 3x + \cos (x-\frac{\pi}{6} = 2)$$

Так как значения функций синус и косинус не превосходят 1, то это равенство возможно только тогда, когда оба слагаемых будут равны 1, т. е. данному уравнению равносильна система:

$$\begin{cases} \sin 3x = 1 \\ \cos(x-\frac{\pi}{6}) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{2}(4k+1)k \in Z \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6}(4k+1), k \in Z \\ x = \frac{\pi}{6}(12n+1), n \in Z. \end{cases}$$

Очевидно, что множество {12n+1} является подмножеством множества {4к + 1}, а следовательно, является пересечением этих множеств. Решением системы (а значит, и уравнения) будет множество

$$\left\{ \frac{\pi}{6}(12k+1) \mathrm{I}\ \kappa \in Z \right\}$$

$$2.\ \sin^2(x-\frac{\pi}{4}) + \cos^2 2x = 0\ )$$

Решением уравнения являются значения ***x***, при которых оба слагаемых одновременно равны нулю, т, е. решения системы:

$$\begin{cases} \sin(x-\frac{\pi}{4}) = 0, \\ \cos 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi k + \frac{\pi}{4}, k \in Z, \\ 2x = \frac{\pi}{2}(2n+1), n \in Z \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4}(4k+1), k \in Z \\ x = \frac{\pi}{4}(2n+1), n \in Z \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = \frac{\pi}{4})(4k+1), k \in Z.$$

Ответ: $\left\{ \frac{\pi}{4}(4k+1)\ \text{Ж}\ k \in Z \right\}$

Одним из наиболее трудных вопросов при решении тригонометрических уравнений является исключение посторонних корней. При этом из множества найденных решений надо вычесть множество значений переменной, которые не входят в область определения данного уравнения.

Решим тригонометрическое уравнение

$$\frac{\cos 2x}{1+tgx} = 0 \qquad (6)$$

Его решение сводится к решению равносильной ему смешанной системы:

$$\begin{cases} \cos 2x = 0 \\ tgx = -1, \\ \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} x = \frac{\pi}{4}(2k+1), k \in Z, \\ x = \frac{\pi}{4}(4n+3), n \in Z, \\ x = \frac{\pi}{2}(2m+1) = \frac{\pi}{4}(4m+2), m \in Z. \end{matrix}$$

Вычитая из множества нечетных чисел множества чисел вида 4л+3 и 4лг+2, получим множество решений системы, а следовательно, и данного уравнения;

$$\left\{-\frac{\pi}{4}(4k+1)\ \mathrm{I}k\in Z\ \right\}.$$

Решение уравнения

$$\mathrm{Sin}\ x\cdot tg\,2x\cdot\sec\ 3x=0$$

сводится к решению двух систем:

$$\begin{cases}\sin x=0,\\ \cos 2x\neq 0,\\ \cos 3x\neq\end{cases}\quad \text{или}\quad \begin{cases}tg\,2x=0,\\ \cos 2x\neq 0,\\ \cos 3x\neq 0.\end{cases}$$

Решением данного уравнения является $\left\{\pi k\ \mathrm{I}\ k\in Z\ \right\}$.

Литература

1. *Болтянский В. Г. и др*. Лекции и задачи по элементарной математике. М., 1971.
2. *Кутасов А. Д. и др.* Пособие по математике для поступающих в вузы. М., 1988.
3. *Потапов М. К. и др.* Алгебра и начала анализа
4. *Глейзер Г. Д и др*. Повышение эффективности обучения в школе, М., 1989.
5. *Kolmoqorov A. N. və b.* Cəbr və analizin başlanğıcı 10-11, B., 1991.
6. *Гарднер М.* Математические чудеса и тайны. Изд. 3-е, М., Наука, 1977.
7. *Гарднер М.* Математические досуги. М. Мир, 1972.
8. *Дышинский Е. А*. Игротека математического кружка. М. Просвещение.