# Influence of geometric nonlinearity on the stress-strain state of smooth and ribbed reinforced concrete shells

**Tulegenova O.**

# Влияние геометрической нелинейности на напряженно-деформированное состояние гладких и ребристых железобетонных оболочек

**Тулегенова О. Е.**

*Тулегенова Орынша Елеусизовна / Tulegenova Orynsha – ассистент профессора,*
*факультет общего строительства,*
*Казахская головная архитектурно-строительная академия, г. Алматы, Республика Казахстан*

***Аннотация:*** *приведены результаты расчета упругой железобетонной пологой оболочки с учетом геометрической нелинейности. Сделаны сравнения усилий и перемещений, полученных с использованием линейной и нелинейной теорий.*
***Abstract:*** *the results of the calculation of the elastic reinforced concrete shallow shell taking into account the geometric nonlinearity are given. Comparisons of forces and displacements obtained with using linear and nonlinear theories are presented.*

***Ключевые слова:*** *геометрическая нелинейность, усилия, перемещения, упругая пологая железобетонная оболочка.*
***Keywords:*** *geometric nonlinearity, forces, displacements, elastic reinforced concrete shallow shell.*

В настоящее время в строительной практике большое распространение получили облегченные конструкции, обладающие повышенной прочностью и жесткостью. Для создания оптимальных и экономичных зданий и сооружений первостепенной задачей является поиск резерва несущей способности с учетом возможных изменений внутренних усилий и деформаций в процессе эксплуатации. Это требует совершенствования методов расчета, позволяющих более достоверно определять параметры напряженно-деформированного состояния (НДС) конструкций. Для тонкостенных конструкций типа оболочек покрытий при больших нагрузках характерна геометрическая нелинейная зависимость между перемещениями и деформациями.

Исследованиям геометрической нелинейности в оболочечных конструкциям посвящено много теоретических и экспериментальных работ [1-4]. Но открытыми до сих пор остаются вопросы оценки значимости нелинейных эффектов, а также выявление необходимых критериев для использования линейной и нелинейной теорий и прогнозов нелинейного поведения конструкций в пределах, представляющих практическую значимость. В современных программных комплексах для расчета конструкций используется метод конечных элементов. Учет геометрической нелинейности требует более тщательного подхода к выбору конечных элементов и совершенствования методов численной реализации.

Цель данной работы состоит в том, чтобы оценить влияние геометрической нелинейности на напряженно-деформированное состояние пологой оболочки без допущений малости угловых и линейных перемещений. В работе [5] представлены результаты расчета оболочки покрытия с учетом геометрической нелинейности. Численная реализация осуществлялась в виде шагового процесса по параметру нагрузки, т.е. использовался метод последовательных нагружений. Достижение требуемой точности получено путем уменьшения величины приращения нагрузки. Матрица жесткости системы раскладывается в процессе итерации для каждого шага нагружения на сумму двух матриц, одна из которых учитывает линейность на предыдущем i -шаге, вторая учитывает нелинейность на i+1 шаге.

Приведен пример расчета гладкой и ребристой железобетонной оболочки 24х36м в плане (h=0,15м) с различными опорными связями, срединная поверхность с выделенными номерами конечных элементов (для простоты указаны только характерные точки) представлена на рис. 1. Расчет выполнен с использованием компьютерной программы Лира 9.6.

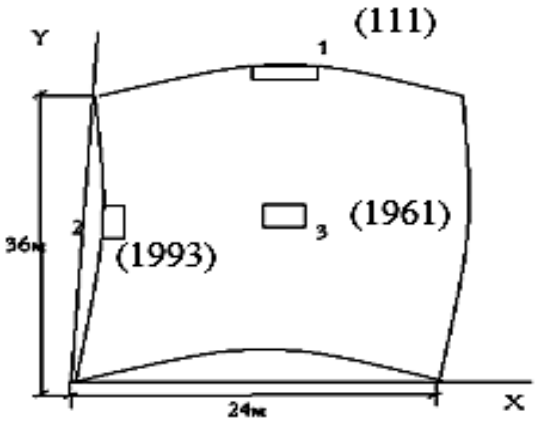


*Рис. 1. Нумерация конечных элементов*

В качестве модели принята модель Тимошенко-Рейсснера, учитывающая сдвиговые деформации. Деформации срединной поверхности и сдвиговые деформации в двух направлениях для гибкой оболочки имеют следующий вид [1-2]:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} - k_1 w + \frac{1}{2}(-\frac{\partial w}{\partial x} + k_1 u)^2, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} - k_2 w + \frac{1}{2}(-\frac{\partial w}{\partial y} + k_2 v)^2,$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + (-\frac{\partial w}{\partial x} + k_1 u)(-\frac{\partial w}{\partial y} + k_2 v), \qquad (1)$$

$$\gamma_{xz} = kf(z)(2\frac{\partial w}{\partial x} - k_1 u), \quad \gamma_{yz} = kf(z)(2\frac{\partial w}{\partial y} - k_2 v), \quad f(z) = 6(\frac{1}{4} - \frac{z^2}{h^2}), \quad \frac{1}{k} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f(z)^2 dz$$

где *u, v, w* - перемещения точек срединной поверхности оболочки в направлении осей x, y, z.; $k_1$, $k_2$- кривизны в двух направлениях, определяемые из уравнения срединной поверхности, h-толщина оболочки.

Физические уравнения для анизотропного материала имеют следующий вид:

$$\sigma_ч = \frac{E}{1-\mu_1\mu_2}[\varepsilon_x + \mu_2\varepsilon_y + z(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2})], \sigma_y = \frac{E}{1-\mu_1\mu_2}[\varepsilon_y + \mu_1\varepsilon_x + z(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2})],$$

$$\tau_{xy} = G_{12}\left[\gamma_{xy} + z(2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y})\right], \qquad \tau_{xz} = G_{13}kf(z)(2\frac{\partial w}{\partial x} - k_1 u), \qquad \gamma_{yz} = G_{23}kf(z)(2\frac{\partial w}{\partial y} - k_2 v),$$

где E, $\mu_1$, $\mu_2$, $G_{12}$, $G_{13}$, $G_{23}$ – прочностные характеристики в разных направлениях. Использованная модель является более универсальной в сравнении с другими авторами [1-5]. При расчете использовался вариационный метод. С учетом нелинейности функционал полной энергии для модели Тимошенко-Рейсснера имеет вид [5]:

$$Э = \frac{1}{2}\int_0^a\int_0^b\left[N_x\varepsilon_x + N_y\varepsilon_y + T_{xy}\gamma_{xy} + M_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + M_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2M_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + Q_x\theta_1 + Q_2\theta_2\right]dxdy -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^a\int_0^b\left[2P_x u + 2P_y v + 2P_z w\right]dxdy,$$

$$\theta_1 = (2\frac{\partial w}{\partial x} - k_1 u), \qquad \theta_2 = (2\frac{\partial w}{\partial y} - k_2 v)$$

где $N_x$, $N_y$, $T_{xy}$, $M_x$, $M_y$, $M_{xy}$- соответственно мембранные и изгибные усилия, $P_i$ – составляющие внешней нагрузки.

Для недеформированной оболочки составляющие внешней нагрузки имеют вид:

$P_x=q_1$, $P_y=q_2$, $P_z=q_3$

Для деформированной формы оболочки составляющие внешней нагрузки имеют вид:

$$q_1^* = q_1 - \frac{\partial u}{\partial y} q_2 + \frac{\partial w}{\partial x} q_3, q_2^* = q_2 - \frac{\partial v}{\partial x} q_1 + \frac{\partial w}{\partial y} q_3, \quad q_3^* = q_3 - \frac{\partial w}{\partial x} q_1 - \frac{\partial w}{\partial y} q_2$$

Результаты численного расчета железобетонной оболочки размером 36х24 м в плане представлены в таблицах 1-4 [5]. В таблицах 1 и 2 представлены значения внутренних усилий, линейные и угловые перемещения в гладкой оболочке, шарнирно опертой по краям с учетом и без учета геометрической нелинейности. Размерность усилий и перемещений в кН, кНм, см.

*Таблица 1. Значения внутренних усилий в гладкой оболочке, шарнирно опертой по краям*

| № элемента | $N_x$ | $N_y$ | $T_{xy}$ | $M_x$ | $M_y$ | $M_{xy}$ | $Q_x$ | $Q_y$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Без учета геометрической нелинейности** | | | | | | | | |
| 111 | -2,71 | -260,2 | 9,28 | -0,0043 | 0,005 | $-38x10^{-6}$ | 0,033 | -0,001 |
| 1993 | -139,9 | -32,92 | -18 | 0,017 | 0,055 | $-72x10^{-6}$ | -0,005 | -0,1 |
| 1961 | -72,17 | -221,7 | -0,64 | -0,001 | 0,002 | $43x10^{-6}$ | 0 | -0,002 |
| **С учетом геометрической нелинейности** | | | | | | | | |
| 111 | -2,12 | -194,2 | 9,28 | -0,0043 | 0,005 | $-38x10^{-6}$ | 0,033 | -0,001 |
| 1993 | -77,36 | -24,4 | -17 | 0,12 | 0,375 | -0,006 | 0,012 | -0,26 |
| 1961 | -66,81 | -205 | -0,54 | -0,01 | 0,014 | 0,004 | 0,013 | 0,003 |

Т*аблица 2. Значения линейных и угловых перемещений в гладкой оболочке*

| № элемента | u | v | z | $u_x$ | $v_y$ | $w_z$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Без учета геометрической нелинейности** | | | | | | |
| 111 | -0,45 | -0,775 | -8,07 | -1,8 | -0,934 | -2,33 |
| 1961 | 0,0045 | -0,007 | -3,42 | -0,018 | 0,009 | 0,02 |
| **С учетом геометрической нелинейности** | | | | | | |
| 111 | 0,72 | -0,984 | 9,07 | -1,13 | -2,53 | -4,6 |
| 1961 | 0,072 | -0,009 | 3,42 | -0,11 | -0,024 | 0,4 |

В таблице 3 представлены линейные и угловые перемещения в ребристой оболочке, шарнирно опертой по краям с учетом и без учета геометрической нелинейности.

*Таблица 3. Значения линейных и угловых перемещений в ребристой оболочке*

| № элемента | u | v | z | $u_x$ | $v_y$ | $w_z$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Без учета геометрической нелинейности** | | | | | | |
| 111 | -0,267 | -0,726 | -8,6 | -1,29 | -0,573 | -0,111 |
| 1961 | 0,0027 | -0,007 | -2,21 | 0,161 | 0,0057 | 0,0011 |
| **С учетом геометрической нелинейности** | | | | | | |
| 111 | -0,259 | -0,841 | -9,5 | -1,45 | -0,645 | -0,603 |
| 1961 | 0,0026 | -0,0084 | -3,6 | -0,0181 | 0,006 | 0,006 |

В таблице 4 представлены линейные и угловые перемещения в гладкой оболочке, жестко защемленной по краям с учетом и без учета геометрической нелинейности.

*Таблица 4. Значения линейных и угловых перемещений в гладкой оболочке, жестко защемленной по краям с учетом и без учета геометрической нелинейности*

| № элемента | u | v | z | $u_x$ | $v_y$ | $w_z$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Без учета геометрической нелинейности** | | | | | | |
| 111 | -0,085 | -0,189 | -2,29 | -0,44 | -0,235 | -0,034 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1961 | 0,001 | -0,002 | -0,86 | 0,004 | 0,002 | 0,0003 |
| **С учетом геометрической нелинейности** | | | | | | |
| 111 | -0,151 | -0,275 | -2,44 | -1,7 | -0,64 | -1,33 |
| 1961 | 0,0015 | -0,002 | -1,05 | -0,01 | 0,003 | 0,003 |

**Вывод**

1. Геометрическая нелинейность в тонкостенных конструкциях типа оболочек покрытий существенно влияет на напряженно-деформированное состояние, в результате ее влияния в оболочке происходит перераспределение внутренних усилий, С учетом геометрической нелинейности в основном действие мембранных усилий незначительно ослабевает, увеличивается влияние изгибных усилий;

2. Учет геометрической нелинейности приводит к уменьшению внутренних усилий в сравнении с линейной теорией, при этом происходит возрастание линейных и угловых перемещений.

***Литература***


1. *Агапов В. П., Васильев А. В.* Учет геометрической нелинейности при расчете железобетонных колонн прямоугольного сечения методом конечных элементов**.** М: Вестник МГСУ, 2014/4. С. 37- 43.
2. *Карпов В. В*., Игнатьев О. В., Сальников А. Ю. Нелинейные математические модели деформирования оболочек переменной толщины и алгоритмы их исследования М.: АСВ. СПб.: СПбГАСУ, 2002. 420 с.
3. *Карпов В. В.* Прочность и устойчивость подкрепленных оболочек вращения. Москва, Физматлит, 2010. 288с.
4. *Клованич С. Ф., Безушко Д. И.* Метод конечных элементов в нелинейных расчетах пространственных железобетонных конструкциях. Одесса, изд. ОНМУ, 2009. 89 с.
5. *Достанова С. Х., Тулегенова О. Е.* Расчет ребристой пологой оболочки с учетом геометрической нелинейности. Сб. матер. Международ. Научно-практ. Конф. «Актуальные проблемы и перспективы развития строительных конструкций: Инновации, модернизация и знергоэффективность в строительстве». Алматы, 2016. С. 92-96.