Solving of non-linear partial differential equations of second order with many variables by means of the method of additional argument

Ashirbaeva A.[1], Mamaziaeva E.[2]

Решение нелинейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка со многими переменными методом дополнительного аргумента

Аширбаева А. Ж.[1], Мамазиаева Э. А.[2]

[1]Аширбаева Айжаркын Жоробековна / Ashirbaeva Aizharkyn - доктор физико-математических наук, заведующая кафедрой;
[2]Мамазиаева Эльмира Амановна / Mamaziaeva Elmira - старший преподаватель, кафедра прикладной математики,
Ошский технологический университет им. Адышева, г. Ош, Кыргызская Республика

Аннотация: *использование метода дополнительного аргумента дает возможность исследовать новые классы задач для уравнений в частных производных. Основная идея этого метода состоит в том, что исходная краевая задача путем введения дополнительной переменной сводится к системе интегральных уравнений, удобной для исследования. Отождествление переменных в решении такой системы дает решение исходной задачи.*
В настоящее время идея метода дополнительного аргумента находит свое применение при исследовании нелинейных дифференциальных уравнений высших порядков и при изучении периодических решений сингулярно-возмущенных уравнений.
На основе метода дополнительного аргумента производятся исследования решения нелинейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка со многими переменными.
Abstract: *Use the method further argument makes it possible to explore new classes of problems for partial differential equations. The basic idea of this method is that the initial value problem by introducing an additional variable is reduced to a system of integral equations convenient for study. Identifying the variables in addressing such a system provides a solution to the original problem..*
At present, the idea of the method further argument finds its application in the study of nonlinear differential equations of higher order, and in the study of periodic solutions of singularly perturbed equations. On the basis of an additional argument of the method carried out research solutions of nonlinear partial differential equation of second order with several variables.

Ключевые слова: *дифференциальное уравнение в частных производных, нелинейное уравнение, интегро–дифференциальное уравнение, метод дополнительного аргумента, принцип сжимающих отображений.*
Keywords: *partial differential equation, non-linear equation, integro-differential equation, method of additional argument, contracting mappings principle.*

УДК 517.95

1.Введение

Основы метода дополнительного аргумента систематически изложены в монографии М.И. Иманалиева [1]. Исследованы некоторые классы интегро-дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, а также систем таких уравнений; показано влияние интегральных членов для многих классов дифференциальных уравнений в частных производных, выявлены случаи, когда интегральные возмущения существенно изменяют характер поведения решений.

С использованием основных идей метода дополнительного аргумента в [2, 3] были исследованы дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения в частных производных типа Кортевегаде Фриза, а также нелинейные волновые уравнения.

В работе [4] создана общая схема применения метода дополнительного аргумента для квазилинейного операторно-дифференциального уравнения в частных производных высшего порядка и показана применимость этой схемы для различных конкретных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных высших порядков, а также возможность приближенного решения задач по этой схеме.

В данной работе применяя метод исследования решений квазилинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных высшего порядка, предложенный в [4], исследуем существования и единственность решения нелинейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка со многими переменными.

2. Постановка задачи

Рассматривается нелинейное уравнение вида:

$$\frac{\partial^2 u(t,x_1,x_2,...,x_n)}{\partial t^2}=u(t,x_1,x_2,...,x_n)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[u(t,x_1,x_2,...,x_n)\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u(t,x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x_j}\right]+$$

$$+\frac{\partial u(t,x_1,x_2,...,x_n)}{\partial t}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u(t,x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x_i}+F(t;u(t,\xi_1,\xi_2,...,\xi_n):\xi_1,\xi_2,...,\xi_n), \qquad (1)$$

$$(t,x_1,x_2,...,x_n)\in G_{n+1}(T)=[0,T]\times R^n,$$

где оператор $F(t;u(t,\xi_1,\xi_2,...,\xi_n):\xi_1,\xi_2,...,\xi_n),$ записан в виде: функция каких переменных получается; на функцию скольких переменных действует оператор (по аналогии с записью интегралов); связанные переменные в этой функции.

Например:

$$F(t;u(t,\xi_1,\xi_2,...,\xi_n):\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)=1+u(t,a_1,a_2,...,a_n);$$

$$G(t;u(s,\xi_1,\xi_2,...,\xi_n):s,\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)=t^2+u(b,a_1,a_2,...,a_n);$$

$$H(u(s,\xi_1,\xi_2,...,\xi_n):s,\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)=\int_0^1\int_0^\infty...\int_0^\infty u^2(s,\xi_1,..\xi_n)d\xi_1...d\xi_n ds,$$

(если интеграл сходится).

Рассмотрим уравнение (1) с начальными условиями

$$\frac{\partial^k u(t,x_1,x_2,...,x_n)}{\partial t^k}\Big|_{t=0}=v_k(x_1,x_2,...,x_n), \quad k=0,1, \quad (x_1,x_2,...,x_n)\in R^n \qquad (2)$$

Обозначим через $\overline{C}_b^{(k)}$ - класс функций, непрерывных и ограниченных вместе со своими производными до *к*-го порядка.

3. Основные результаты

Теорема. Если 1) оператор F– непрерывный по первой переменной;

2) он удовлетворяет условию Липшица: существует такое $L>0$, что для любого $T_*\le T$

$$\| F(t;u_1(t,\xi_1,\xi_2,...,\xi_n):\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)-F(t;u_2(t,\xi_1,\xi_2,...,\xi_n):\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)\|_{G_{n+1}(T_*)}\le$$

$$\le L\| u_1(t,x_1,x_2,...,x_n)-u_2(t,x_1,x_2,...,x_n)\|_{G_{n+1}(T_*)},$$

3) $\vartheta_0(x_1,x_2,...,x_n)\in\overline{C}_b^{(1)}(R^n), \vartheta_1(x_1,x_2,...,x_n)\in C(R^n)$

и удовлетворяют условию

$$\vartheta_1(x_1,x_2,...,x_n)-\vartheta_0(x_1,x_2,...,x_n)\sum_{i=2}^{n}\frac{\partial\vartheta_0(x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x_i}=0. \qquad (3)$$

Тогда существует такое $T\le T_*$, явно определяемое на основе исходных данных, что задачи (1), (2) имеет единственное решение, ограниченное во всей области $G_{n+1}(T)$.

Доказательство.

Рассмотрим систему интегральных уравнений:

$$p_i(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n;u)=x_i+\int_\tau^t u(s,p_1(s,t,x_1,x_2,...,x_n;u),...,p_n(s,t,x_1,x_2,...,x_n;u))ds,$$

$$i=1,...,n, \qquad (4)$$

$$(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n)\in Q_2^n(T)=\{0\le\tau\le t\le T,(x_1,x_2,...,x_n)\in R^n\},$$

Для $p_i(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n;u), \quad i=1,...,n$ справедливы тождества

$$p_i(\tau,t,p_1(t,\theta,x_1,x_2,...,x_n;u),...,p_n(t,\theta,x_1,x_2,...,x_n;u))=p_i(\tau,\theta,x_1,x_2,...,x_n;u),$$
$$i=1,...,n,$$
$$(\tau,t,\theta,x_1,x_2,...,x_n)\in Q_3^n(T)=\{0\le\tau\le t\le\theta\le T,(x_1,x_2,...,x_n)\in R^n\}.$$

Введя обозначение

$$v(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n)=u(\tau,p_1(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n;u),...,p_n(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n;u))$$

в (4), имеем:

$$p_i(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n;v(s,t,x_1,x_2,...,x_n):s)=x_i+\int_\tau^t v(s,t,x_1,x_2,...,x_n)ds,\quad (5) \tag{6}$$
$$i=1,2,...,n,$$

Лемма 1. Решение задачи (1), (2) $u(t,x_1,x_2,...,x_n)$, которое при $t=\tau$ совпадает с решением интегрального уравнения

$$v(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n)=\vartheta_0(p_1(0,t,x_1,x_2,...,x_n;v:s)),...,p_n(0,t,x_1,x_2,...,x_n;v:s))+$$
$$+\int_0^\tau(\tau-\rho)F(\rho;v(\rho,\rho,\xi_1,\xi_2,...,\xi_n):\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)d\rho, \tag{7}$$
$$(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n)\in Q_2^n(T)$$

Доказательство леммы 1. Введем обозначение

$$D_n[\omega]=\frac{\partial}{\partial t}+\omega\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Если имеет место равенство

$$D_n[-v(t,t,x_1,x_2,...,x_n)]v(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n)=0, \tag{8}$$

то из (5) вытекает соотношения

$$D_n[-v(t,t,x_1,x_2,...,x_n)]p_i(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n;v:s)=0,\quad i=1,...,n,. \tag{9}$$

Обозначая через

$$z(t,x_1,x_2,...,x_n;u)=D_n[-u(t,x_1,x_2,...,x_n)]u(t,x_1,x_2,...,x_n),$$

запишем уравнение (1) в виде

$$D_n[u(t,x_1,x_2,...,x_n)]z(t,x_1,x_2,...,x_n;u)=F(t;u(t,\xi_1,\xi_2,...,\xi_n):\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)). \tag{10}$$

Уравнение (10) с начальными условиями (2) и условием (3) с помощью метода дополнительного аргумента сводится к решению интегро-дифференциального уравнения

$$z(t,x_1,x_2,...,x_n;u)=\int_0^t F(s;u(s,\xi_1,\xi_2,...,\xi_n:\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)ds. \tag{11}$$

В самом деле, дифференцируя (11), получаем (10).

Полагая $t=0$ в (11), получаем $z(0,x_1,x_2,...,x_n;u)=0.$

Задача (11), (2) с помощью метода дополнительного аргумента сводится к решению интегрального уравнения

$$u(t,x_1,x_2,...,x_n)=\vartheta_0((p_1(0,t,x_1,x_2,...,x_n;v:s)),...,p_n(0,t,x_1,x_2,...,x_n;v:s))+$$
$$\int_0^t(t-\rho)F(\rho;v(\rho,\rho,\xi_1,\xi_2,...,\xi_n):\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)d\rho \qquad (12)$$ В самом деле, дифференцируя (12), получаем

$$D_n[-u(t,x_1,x_2,...,x_n)]u(t,x_1,x_2,...,x_n)=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\vartheta_0}{\partial x_i}D_n[-u(t,x_1,x_2,...,x_n)]p_i(0,t,x_1,x_2,...,x_n;v:s)+$$
$$+\int_0^t(t-\rho)F(\rho;v(\rho,\rho,\xi_1,\xi_2,...,\xi_n):\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)d\rho.$$

В силу (6), (9) доказано выполнение (12). Полагая $t=0$ в (12),получаем (2).

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Существует такое $T_*>0$, что интегральное уравнение (7) имеет единственное решение в $\overline{C_b}^{(2)}(Q_2^n(T_*))$.

Доказательство леммы 2.

Запишем интегральное уравнение (7) в виде $v(\tau,t,x_1,...,x_n)=A(\tau,p_1(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n;v:s)),...,p_n(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n;v:s);v(s,w,x_1,...,x_n):s,w),$

где оператор

$$A(\tau,p_1(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n;v:s)),...,p_n(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n;v:s);v(s,w,x_1,...,x_n):s,w)=$$
$$=\vartheta_0(p_1(0,t,x_1,x_2,...,x_n;v:s)),...,p_n(0,t,x_1,x_2,...,x_n;v:s))+$$
$$+\int_0^\tau(\tau-\rho)F(\rho;v(\rho,\rho,\xi_1,\xi_2,...,\xi_n):\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)d\rho,$$

Имеем при $\tau\le t\le T_*\le T$:

$$\left|A(\tau,p_1(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n;0:0)),...,p_n(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n;0:0))\right|=$$
$$=\Big|\vartheta_0(p_1(0,t,x_1,x_2,...,x_n;0:0)),...,p_n(0,t,x_1,x_2,...,x_n;0:0))+$$
$$+\int_0^\tau(\tau-\rho)F(\rho;0)d\rho\Big|\le\left|\vartheta_0(p_1(0,t,x_1,x_2,...,x_n;0:0)),...,p_n(0,t,x_1,x_2,...,x_n;0:0))\right|+$$
$$+\left|\int_0^\tau(\tau-\rho)F(\rho;0)d\rho\right|\le\left\|\vartheta_0\right\|_{R^n}+\|F(t;0)\|_{[0,T]}\frac{t^2}{2}\le\Omega_0(T_*),$$

где

$$\Omega_0(S)\equiv\|\vartheta_0\|_{R^n}+\|F(t;0)\|_{[0,T]}\frac{S^2}{2}.$$

Далее, при $\tau\le t\le T_*\le T$:

$$\Big|A(\tau,p_1(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n;v_1(s,w,x_1,...,x_n):s,w),...,p_n(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n;v_1(s,w,x_1,...,x_n):s,w))-$$
$$-A(\tau,p_1(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n;v_2(s,w,x_1,...,x_n):s,w),...,p_n(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n;v_2(s,w,x_1,...,x_n):s,w))\Big|\le$$
$$\le\sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial\vartheta_0}{\partial x_i}\right\|\int_0^t|v_1(s,t,x_1,...,x_n)-v_2(s,t,x_1,...,x_n)|ds+$$
$$+\int_0^\tau(\tau-\rho)L\|v_1(w,s,x_1,...,x_n)-v_2(w,s,x_1,...,x_n)\|_{G_{n+1}(t)}d\rho\le$$

$$\le t\left(\sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial\vartheta_0}{\partial x_i}\right\|+\frac{T}{2}L\right)\| v_1(w,s,x_1,\dots,x_n)-v_2(w,s,x_1,\dots,x_n)\|_{G_{n+1}(t)}\le$$

$$\le T_{\bullet}\Omega_1\| v_1(w,s,x_1,\dots,x_n)-v_2(w,s,x_1,\dots,x_n)\|_{G_{n+1}(t)},$$

где $\Omega_1=\sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right\|+\frac{T}{2}L.$

Если выбрать $T_*=\frac{1}{2}\Omega_1$, то из следствия из принципа сжимающих отображений Банаха получаем, что уравнение (6) имеет решение в пространстве функций с нормой не более $2\Omega_0,(T_*)$.

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Функция $v(\tau,t,x_1,x_2,\dots,x_n)\in\overline{C}_b^{(2)}(Q_2^n(T))$, являющаяся при $0\le t\le T_*\le T:$ решением интегрального уравнения (7), будет удовлетворять (8), а функция $u(t,x_1,x_2,\dots,x_n)$, определенная согласно (6), удовлетворяет (12).

Доказательство леммы 3. Пусть $v(\tau,t,x_1,x_2,\dots,x_n)\in\overline{C}_b^{(2)}(Q_2^n(T_*))$ обращает интегральное уравнение (7) в тождество. Непосредственным дифференцированием из (7) выводится тождество

$$\omega(\tau,t,x_1,\dots,x_n)\equiv\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\vartheta_0}{\partial x_i}\int_0^t\omega(s,t,x_1,\dots,x_n)ds,$$

где

$$\omega(\tau,t,x_1,\dots,x_n)=D_n[-v(t,t,x_1,x_2,\dots,x_n)]v(\tau,t,x_1,x_2,\dots,x_n).$$

Из тождества следует равенство $\omega(\tau,t,x_1,\dots,x_n)=0$. Отсюда следует (8). Полагая $\tau=t$ в (7), из Леммы 2 получаем (12).

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. Решение уравнения (6) при достаточно малых t имеет непрерывные производные по всем переменным.

Доказательство леммы 4. Если предположить, что $v_t\in\overline{C}$, то функциональном пространстве $\overline{C}\ (Q_2^n(T_*))$ имеем

$$\left\|\frac{\partial A(\tau,p_1(\tau,t,x_1,\dots,x_n;v:s)),\dots,p_n(\tau,t,x_1,x_2,\dots,x_n;v:s);v(s,w,x_1,\dots,x_n):s,w)}{\partial t}\right\|\le$$

$$\le\sum_{k=1}^{n}\left\|\frac{\partial\vartheta_0}{\partial x_i}\right\|(v+\frac{T^2}{2}\|v_t\|)=V_t\ =const<\infty.$$

Справедлива оценка

$$\left\|\frac{\partial A(\tau,p_1(\tau,t,x_1,x_2,\dots,x_n;v_1:s),\dots,p_n(\tau,t,x_1,x_2,\dots,x_n;v_1:s);v_1:s,w)}{\partial t}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial A(\tau,p_1(\tau,t,x_1,x_2,\dots,x_n;v_2:s),\dots,p_n(\tau,t,x_1,x_2,\dots,x_n;v_2:s);v_2:s,w)}{\partial t}\right\|\le$$

$$\le 2T_*\Omega_1\|v_{1t}-v_{2t}\|.$$

Аналогично получаем для оператора $\frac{\partial A}{\partial x_i},\quad i=1,2,\dots,n$ оценки

$$\left\| \frac{\partial A(\tau, p_1(\tau,t,x_1,...,x_n;v:s),...,p_n(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n;v:s);v(s,w,x_1,...,x_n):s,w)}{\partial x_i} \right\| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} \left\| \frac{\partial \vartheta_0}{\partial x_i} \right\| (1+\frac{T^2}{2}\left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|) = V_{x_i} = const < \infty.$$

$$\left\| \frac{\partial A(\tau, p_1(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n;v_1:s),...,p_n(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n;v_1:s);v_1:s,w)}{\partial x_i} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial A(\tau, p_1(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n;v_2:s),...,p_n(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n;v_2:s);v_2:s,w)}{\partial x_i} \right\| \le$$

$$\le 2T_*\Omega_1 \left\| \frac{\partial v_1}{\partial x_i} - \frac{\partial v_2}{\partial x_i} \right\|, \quad i=1,2,...,n..$$

Дифференцируя (12) по t и по x, получаем

$$\left\| \frac{\partial u(t,x_1,...,x_n)}{\partial t} \right\| \le \|F\| T + V_t, \quad \left\| \frac{\partial u(t,x_1,...,x_n)}{\partial x_i} \right\| \le V_{x_i}, \quad i=1,2,...,n.$$

Продолжая этот процесс, можно получить, справедливость

$$v(\tau,t,x_1,...,x_n) \in \overline{C}_b^{(2)}(Q_2^n(T_*)), \quad u(t,x_1,...,x_n) \in \overline{C}_b^{(2)}(G_{n+1}(T_*)).$$

Лемма 4 и теорема доказаны.

Литература

1. *Иманалиев М. И.* Нелинейные интегро-дифференциальные уравнения с частными производными. Бишкек: Илим, 1992. 112 с.
2. *Иманалиев М. И., Алексеенко С. Р.* К теории нелинейных уравнений с дифференциальным оператором типа полной производной по времени // Доклады Российской АН, 1993. Т. 329. № 5. С. 543–546.
3. *Иманалиев М. И., Панков П. С., Иманалиев Т. М.* К теории нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных типа Кортевега - де Фриза // Доклады Российской АН, 1995. Т. 342. № 1. С.17–19.
4. *Аширбаева А. Ж.* Решение нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка методом дополнительного аргумента. Бишкек: Илим, 2013. 134 с.