The Problem Of Locating Agrıcultural Productıon
Abdullayev A.[1], Aliyeva B.[2]

Задача размещения сельскохозяйственного производства
Абдуллаев А. Х.[1], Алиева Б. М.[2]

[1]Абдуллаев Абдулла Худаят / Abdullaev Audulla – доцент,
кафедра информационной экономики и технологии;
[2]Алиева Басти Махар / Aliyeva Basti - старший преподаватель,
кафедра экономики и бизнес администрирования,
турецкий факультет менеджмента,
Азербайджанский государственный экономический университет, г. Баку, Азербайджанская Республика

Аннотация: *предложен эффективный метод и алгоритм для решения задачи размешения сельскохозяйственного производства, сформулированной как задача частично-целочисленного программирования большой размерности, на основе модификации декомпозиционной схемы Бендерса. Для решения известной подзадачи Бендерса использованы идеи ограниченного метода ветвей и границ и предложена схема ветвления. При этом для проверки вершин и отбраковки неконкурентоспособных вариантов применены два критерия и стратегия их использования. Для решения оценочных задач на вершинах также предложен эффективный метод.*

Abstract: *an efficient method and algorithm for solving the problem of agricultural production announcement is formulated as a problem of mixed integer programming of large dimension, based on the modification of the decomposition Benders scheme. To solve the subtasks known Benders used the idea of a limited branch and bound method and the proposed branch circuit. At the same time to check the peaks and rejection of non-competitive options applied two criteria and strategy for their use. To solve valuation problems on the tops also provides an effective method.*

Ключевые слова: *частично-целочисленного программирования, метод ветвей и границ, декомпозиционный метод Бендерса, задача размещения.*

Keywords: *mixed integer programming, branch and bound, Benders decomposition method, placing the task.*

Регулирование сельскохозяйственного производства в республике является одной из основных функций государства в условиях перехода к рыночной экономике. Для решения таких задач, как оптимизация структуры сельскохозяйственного производства, исследование возможности республики в области производства продовольствия, определение экспортного потенциала требуются специальные методы и инструментарий. С другой стороны, для корректного ведения таких исследований нужны соответствующие математические методы решения задач большой размерности.

В даной работе дается алгоритм решения задачи размещения сельскохозяйственного производства, сформированный в [1]:

$c`x + q`v + d`y \rightarrow \min$ (1)

$Ax + D_1y \geq b_1$ (2)

$Qv + D_2y \geq b_2$ (3)

$y \in \Omega$ (4)

$x, v \geq 0$, y – булевый вектор (5)

где c, q, d, b_1,b_2 – векторы, A, Q, D_1, D_2 матрицы соответствуюшей размерности (D_1, $D_2 \leq 0$), x - вектор непрерывных, v – вектор транспортных переменных.

Множество Ω определяется из ограничений:

$$\sum_{k=1}^{k_\mu}\sum_{j=1}^{n} R_{\mu k}.\text{EMBED Equation.DSMT4}\ \overline{V_\mu}, \mu \epsilon M \quad (6)$$

$$\prod_{-j} \leq \sum_{\eta \in M}\sum_{k=1}^{k_\mu} H_{\eta k}.y^{k}_{\mu_j} \leq \overline{\prod}_j, j \in J \quad (7)$$

$$\sum_{\mu \in M}\sum_{k=1}^{K} y^{k}_{\eta_j} \leq 1, j \in J \quad (8)$$

где $R_{\mu k}$, $\overline{V_\mu}, H_{\mu k}$ - положительные коэфициенты. Ограничения (6) – это есть ограничение по плану производства животноводческой продукции, причем, $R_{\mu k}$ к-я возможная мощность μ-й, отрасли.

Ограничения (7) – корма с пастбищ используются в хозяйстве, в котором они находятся. Ограничения (8) – это условия специализации производства. Булева переменная $y^k_{\mu j}$ равно 1, если в j- M_η пункте размещается предприятие μ-й отрасли мощности $R_{\mu k,}$ и равно нулю в противном случае.

1. Основные подзадачи

Решение задачи методом, изложенным в [2], сводится к последовательному решению следующих задач:

- задачи линейного программирования при фиксированных значениях булевых переменных y:

$C` x \rightarrow \min$ (9)

$Ax \geq b_1 - D_1 y$ (10)

$x \geq 0$ (11)

- транспортной задачи, также при фиксированных знаниях y:

$q`V \rightarrow \min$ (12)

$Q.v \geq b_2 - D_2 y$ (13)

$v \geq 0$ (14)

- Задачи нахождения допустимого решения системы неравенств:

$d`y + (b_1 - D_1 y)`u^i + (b_2 - D_2 y)` p^i < Z^t \varepsilon, \; i = \overline{0,t}$ (15)

$y = \Omega$ (16)

y – булевый вектор (17)

где u^i и p^i является двойственными оценками соответственно задач (9) – (11), (12) – (14) на i –й итерации декомпозиционного метода. Введем следующие обозначения:

$a^i = d - u^i.D_1 - p^i D_2, \; b^i = b`_1.u^i + b`_2 p^i$ (18)

Задачу (15) - (17) перепишем в виде

$a_i y + b^i < Z^t \varepsilon, \; i = \overline{0,t}$ (19)

$y = \Omega$ (20)

$y \in \{0,1\}$ (21)

- Задачи линейного программирования для формирования оценочной задачи:

$\min z$ (22)

$a^i y + b^i \leq Z$ (23)

$y \in \Omega$ (24)

$y \geq 0$ (25)

Число оргоничений этой задачи увеличивается на единицу на каждой итерации декомпозицонной схемы.

- оценочная задача следующего общего вида, которая формируется через двойственные оценки задачи (22) - (25):

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}.x_{ij} \rightarrow \min \qquad (26)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}.x_{ij} \geqslant b \qquad (27)$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq 1 \;, \qquad i = \overline{1,n} \qquad (28)$$

$$x_{ij} \geq 0 \;, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m} \qquad (29)$$

Отметим,что для решения линейных задач большой размерности можно использовать пакет программы составленных на основе методов изложенных в [3, 4, 5].

2. Пошаговое описание общего декомпозиционного алгоритма

В этом параграфе дается алгоритм решения исходной задачи размещения сельскохозяйственного производства.

Пошаговое описание итерационного процесса выглядит следующим образом:

Шаг 0. Ввод исходной информации. Генерация неизменяемых матриц условий для задач (9) – (11) и (22) –(25). Запись сгенерированных матриц на диск. Присвоить t:=0.

Шаг 1. Считывание с диска сгенерированных неизменных матриц и получение решения x^t и двойственных оценок u^t задачи (9) – (11) при $y = y^t$.

Шаг 2. Оформление и решение транспортной задачи (12) – (14) при фиксированном $y = y^t$, v^t - решение транспортной задачи, p^t - ее двойственные оценки.

Шаг 3. Вычисление коэффициентов a^t, b^t по формуле (18). Если

$a^t y^t * b^t \geq Z_e{}^t$ то перейти к шагу 6.

Шаг 4. Обновление рекорда. Решение (x^t, v^t,y^t) запоминается. Вычисляется значение: $F^t = a^t y^t + b^t$ и обновляется рекорд

$Z^t_\varepsilon = F^t / (1+\varepsilon)$.

Шаг 5. Добавление к системы неравенств (19) ограничения

$a^t y + b^t < Z\varepsilon^t$

Шаг 6. Считывание с диска сгнерированной матрицы для задачи (22) – (25). Добавление одной строки в матрицу ограничений, запись на диск.

Шаг 7. Проверка: если t < T (T - заранее выбранное число), то перейти к шагу 10.

Шаг 8. Решение задачи (24) – (27). Пусть: Z_t^* - Решение задачи (24) – (27). Проверка: если $Z^*_t \geq Z^t\varepsilon$, то перейти к шагу 12.

Шаг 9.Формирование оценочной задачи с помощью двойственных оценок задачи (22)-(25).

Шаг10.Отыскание допустимого решения системы неравенства (21) - (32). Если допустимого решения нет, тогда перейди к шагу 12.

Шаг 11. Подготовка к следующей итерации. Положить t:= t + 1,

через y^t обозначить найденное допустимое решение системы неравенства, положить $Z\varepsilon^t$: = $Z\varepsilon^{t-1}$. Перейти к шагу 1.

Шаг 12. Конец решения задачи.Текущее рекордное решение принимается в качестве ε решения задачи.

3. Алгоритм нахожденния допустимого решения системы неравенства.

В описанном в предыдущем параграфе алгоритме наиболее трудоемким является шаг 10 - нахождение допустимого решения системы неравенств. Опишем по шагам алгоритм решение задачи(19) - (23).

Для удобства изложения введем следующие обозначения:

$$A^t = \begin{Vmatrix} a^0 & & b^0 \\ \dots & \dots & \dots \\ a^t & & b^t \end{Vmatrix}$$

где векторы $a^0,\dots,a^t$ и числа $b^0,\dots, b^t$ фигурируют в ограничениях (19) задачи.

Шаг 1. Проверка номера итерации. Если t > 0 (t - номер итерации), то перейти к шагу 10.

Шаг 2. I: = 0 (I - номер уровня), A^0 записать на диск.

Шаг 3. Выбор отрасли для ветвления.

Шаг 4. Выбор вариантов по пунктам размещения.

Шаг 5. Если K(I) =0 (K(I) - количество вариантов на уровне (I), то перейти к шагу 12.

Шаг 6. Упорядочивания вершин в группе. На последующих шагах рассматриваем крайнюю левую вершину.

Шаг 7. Проверка выполнения плана по всем отраслям. Если ограничения (6) удовлетворяется, то перейти к шагу 18.

Шаг 8. Проверка: если t < T перейти к шагу 9.

Решение оценочной задачи. Проверка вершины на возможность отбраковки. Если проверка не прошла, то перейти к шагу 15.

Шаг 9. Переход на следующий уровень I:= I+1. Перейти к шагу 3.

Шаг 10. Считать с диска матрицу A^{t-1}, добавить новую строку, записать A^t на диск.

Шаг 11. Отбраковка заполненных на предыдущей интеграции (t-1) вершин (начиная с корня дерева) по последнему добавленному ограничению. Переход к шагу 5.

Шаг 12. Проверка. Имеется ли следующий вариант мощности, для рассматриваемой отрасли. Если имеется, тогда перейти к шагу 16.

Шаг 13. Возврат на предыдущий уровень I: = I+1 и переходит к следующему шагу.

Шаг 14. Проверка: Если I = 0 то перейти к шагу 19.

Шаг 15. Отбраковка вершины, из которой спустились:

K (I): = K (I) – 1, перейти к шагу 5.

Шаг 16. Выбор следующего варианта мощности для рассиматриваемой отрасли.

Шаг 17. Проверка вершины по допустимости мощности. Если мощность допустима, то перейти к шагу 4, в противном случае - к шагу 13.

Шаг 18. Найдено допустимое решение

Шаг 19. Останов. Допустимого решения не имеется.

4. Метод и алгоритм решения оценочной задачи

Оценочная задача (26) - (29) решается для каждой вершины дерева вариантов в процессе ветвление и, следовательно, затраты времени на ее решение могут занимать значительную часть от общего времени решения всей задачи. В данном параграфе будет изложен эффективный алгоритм решения оценочные задачи. Это задача линейного программирования с одним ограничением общего вида (27) и n ограничениями специального вида (28). Воспользуемся спецификой этой задачи. Задача двойственная к (26) - (29), имеет вид:

$$b.t_0 - \sum_{i=1}^{n} ti \to \max \qquad \textbf{(30)}$$

$$a_{ij}.\ t_0 - t_i \geq c_{ij},\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m} \qquad \textbf{(31)}$$

$$t_i \geq 0,\ i=\overline{1,n} \qquad \textbf{(32)}$$

Систему ограничений (30)-(32) перепишем следующем эквивалентном виде:

$$t_i = \max\left[\max_{1\leq j\leq m}(a_{i_j}.t_0 - c_{i_j}), 0\right] \qquad \textbf{(33)}$$

Преобразуем теперь (33), используя известные свойства операции **max** и **min**

$$t = \max\left[-\min_{1\leq j\leq m}(c_{i_j} - a_{i_j}.t_0), 0\right] =$$

$$-\min\left[-\min_{1\leq j\leq m}(c_{i_j} - a_{i_j}.t_0), 0\right] = \min_{0\leq j\leq m}(c_{i_j} - a_{i_j}.t_0).$$

Где $a_{i0} = c_{i0} = 0$, $i = \overline{1,n}$,

таким образом, задача (30) - (32) преобразуется в задачу с одной переменной - $t \geq 0$ следующего вида

$$\phi(t) = b \cdot t + \sum_{i=1}^{n} \min_{0\leq j\leq m} (c_{ij} - a_{ij} \cdot t) \to \max \ (34).$$

Известно следующее свойство $\phi(t)$ - непрерывная, кусочно-линейная, вогнутая функция. Максимум функции $\phi(t)$ достигается в той точка излома, в которой угловой коэффициент меняет знак с плюса на минус. Из свойств функций $\phi(t)$ следует алгоритм решение задачи (34). Для нахождения точки максимума функции $\phi(t)$, начиная с точки $t_0=0$, последовательно находятся точки излома $t_1,\ldots,t_q$ до тех пор, пока не выполняется условие: углевой коэффициент $k_{q-1}>0$ и $k_q \leq 0$. Тогда точка $t=t_q$ принимается за решение задачи (34).

Опишем теперь подробно метод решения оценочном задачи, предварительно переписав ее в более удобном виде. Обозначим

$$\phi_i(t) = \min_{0\leq j\leq m} (c_{ij} - a_{ij} \cdot t)$$

Тогда задача (34) примет следующий вид:

$$\phi(t) = b.t + \sum_{i=1}^{n} \phi_i(t) \to \max,\ t \geq 0 \qquad (35)$$

Очевидно, что точки излома функции $\phi(t)$ находятся среди точек излома функция $\phi_i(t)$, $i=\overline{1,n}$.

Опишем метод отыскания точки излома функции $\phi_i(t)$, следующим за точкой t. Назовем этот метод алгоритмом $T^i(t)$. Пусть известна точка излома t функция $\phi_i(t)$. Найдем следующий точка излома $t^i>t$. Уравнения

$$\phi_i(t)=- a_{ij}t+c_{ij}= \min_{0\le j\le m}(-a_{i_{j_i}}.t + c_{i_j})$$

есть уравнение прямой в правой окрестности точки t. Найдем точки пересечения этой прямой с прямыми

$$Y(t)=-a_{ij}t+c_{ij},\ j \neq j_i \qquad \textbf{(36)}$$

для которых $a_{ij} < a_{ij}$

Наименьший корень

$t_i = \min\{(c_{ij} - c_{ij})/(a_{ij} - a_{ij})|\ j \neq j_i, a_{ij} < a_{ij}\}$

является ближашей к t точка излома функции $\phi_i(t)$.

Зная теперь алгоритм $T^i(t)$, изложим алгоритм решения задачи (35).

Составим список $t=(t_1,t_2,t_3,\ldots,t_n)$. С помощью алгоритма $T^i(t)$ для всех $i=\overline{1,n}$ найдем следующую за нулем точку излома функции

$\phi_i(t)$. Эти значения t_i занесем в список t.

Положим p=1.

Шаг 1. Найдем такой t_{ip} в списке t, что

$t_{ip} = \min\{ t_i | t_i \in t \}$.

Шаг 2. Определим уравнение функции $\phi(t)$ на отрезке $[t_{ip-1}, t_{ip}]$

$$\phi(t)=(b-\sum_{i=1}^{n} a_{ij})t + \sum_{i=1}^{n} c_{ij.}$$

Шаг 3. Если коэффициент при t в (37) отрицательно, то t_{ip}-1 является искомой точкой. В противном случае перейдем к шагу 4.

Шаг 4. С помощью алгоритма $T^i(t_p)$ для $t=t_{ip}$ найдем следующую за t_{ip} точку излома функции $\phi_{ip}(t)$ и занесеи это значение в список t на место $i_{p..}$

Шаг 5. Увеличим значение p на единицу, т. е. p: = p+1 и придем к шагу 1.

В заключение сделаем одно замечание, позволяющие ускорить работу алгоритма. Если в процессе отыскания максимума $\phi(t)$ окажется, что $\phi(t) > z_e$, то следует остановиться, т. к. исследуемая вершина дерева вариантов исходной задача должна быть отбракована.

Проведены вычислительные эксперименты. Метод решения позволяет достаточно быстро находить решения, близкие к оптимальному, точность которых в большинстве случаев является вполне достаточной для лиц, принимающих практические решения.

Литература

1. *Абдуллаев А. Х.,Киселев В. Г.* Задача размещения сельскохозяйственного производства в объединении хозяйств мелиоративной системы. Москва, ВЦ АН СССР, 1985 г.
2. *Абдуллаев А. Х., Киселев В. Г.* Метод решения целочисленной подзадачи Бендерса в некоторых задачах размещения производства. Москва, ВЦ АН СССР, 1985 г.
3. *Малков У. Х.* Обзор путей повышения эффективности мультипликативного алгоритма симплекс метода. В кн.: Математические методы решения экономических задач. М: Наука, 1977 г., вып. 7.
4. *Станевичюс А.-И. А., Шкляр П. Э.* Замечания к алгоритму симплекс метода для задач больших размеров ЖВМ. 1982. N 1.
5. *Муртаф Б.* Современное линейное программирование М.: Мир, 1984.
6. *Уздемир А. П.* Декомпозиция при решении комбинаторной задачи определения моментов ввода предприятий. Автоматика и телемеханика, 1977, № 10, с. 110-121.
7. *Уздемир А. П.* Метод решения комбинаторной задачи определения моментов ввода предприятий. Автоматика и телемеханика,1978, № 10, с. 142-152.
8. МатБюро, Математические методы в экономике Решение контрольных и задач, http://www.matburo.ru/sub_subject.php?p=emm (Дата обращения: 14.05.2016).
9. *Фомин Г. П.* Математические методы и модели в коммерческой деятельности: Учебник.М.: Финансы и статистика, 2005.
10. *Кузнецов А. В. Холод Н. И., Костевич Л. С.* Руководство к решению задач по математическому программированию. - Мн.: Вышэйш. шк., 1978.

11. Кузнецов Б. Г. Математические методы и модели исследования операций: учебное пособие для студентов ВУЗов, обучающихся по специальности «Математические методы в экономике».