Methods of solving some equations and inequalities using vector
Askarova M.
Методы решения некоторых уравнений и неравенств с помощью вектора
Аскарова М. А.

Аскарова Меруерт Аскаровна/ Askarova Meruert – кандидат педагогических наук, профессор,
кафедра математики и информационных систем,
Казахский национальный педагогический университет им. Абая, г. Алматы, Республика Казахстан

Аннотация: *в статье рассматриваются методы, использующие понятие вектора для решения некоторых уравнений и неравенств, изучению которых в общеобразовательной школе уделяется мало внимания. Применение предлагаемых методов иллюстрируется на решении различных уравнений и неравенств с повышенной сложностью.*
Abstract: *the article addresses the methods that use the concept of vector to solve some equations and inequalities, the study of which in a secondary school has received little attention. The application of the proposed method is illustrated by solving various equations and inequalities with increased complexity.*
Ключевые слова: *нестандартный метод, применение свойства векторов, уравнения и неравенства, математическое мышление.*
Keywords: *nonstandard method, using the properties of vectors, equations and inequalities, mathematical thinking.*

К числу нестандартных методов решения уравнений и неравенств относится метод, основанный на применении свойств векторов. Их применение требует от учащихся несколько необычных рассуждений. Этот метод позволяет эффективно решать довольно-таки сложные уравнения и неравенств. Тем более, что такие методы, как правило, не изучаются в общеобразовательной школе.

Знание нестандартных методов и приемов решения задач повышенной сложности способствует развитию учащихся нестандартного математического мышления, что является необходимым условием для последующего успешного изучения высшей математики в вузах с углубленным изучением математики.

Первоначально приведем понятие и свойства вектора, а затем проиллюстрируем их применение на примерах.

Вектор $\vec{a}$ в трехмерном пространстве характеризуется тремя координатами a_1, a_2, a_3 и модуль (длины) вектора $\vec{a}$ вычисляется по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \qquad (1.1)$$

Суммой (разностью) двух векторов $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ называется вектор $\vec{c}(c_1, c_2, c_3)$, координаты которого вычисляются как $c_1 = a_1 + b_1$, $c_2 = a_2 + b_2$, $c_3 = a_3 + b_3$ (соответственно, $c_1 = a_1 - b_1$, $c_2 = a_2 - b_2$, $c_3 = a_3 - b_3$).

Два отличных от нуля вектора называется коллинеарными, если они лежат на одной прямой или на паралельных прямых. У коллинеарных векторов соответствующие координаты пропорциаональны. Верно и обратное утверждение: если у двух векторов сооттветствующие координаты пропорциональны, то векторы коллинеарные.

Для векторов $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ справедливо неравенство $|\vec{a}| + |\vec{b}| \geq |\vec{a} + \vec{b}|$, т.е.

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} \geq \sqrt{(a_1 \pm b_1)^2 + (a_2 \pm b_2)^2 + (a_3 \pm b_3)^2} \qquad (1.2)$$

Формула (1.2) обобщаются на случай суммы (или разности) трех и более векторов. Геометрический смысл (1.2) состоит в том, что длина ломаной линии, соединяющей две точки трехмерного пространства, больше или равна длине отрезка прямой, проведенного между этими точками. Формула (1.2) иначе называется неравенством треугольника.

Следует особо отметить, что равенство в (1.2) достигается тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарные. В частности, из равенства в (1.2) следует, что

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}.$$

Причем равенство $|\vec{a}| + |\vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}|$ имеет место тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a}$ и $\overline{b}$ сонаправлены, т.е.

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} > 0.$$

В свою очередь, равенства $\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$ свидетельствует о том, что векторы $\vec{a}$, $\bar{b}$ противоположно направлены и

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}<0.$$

Скалярным произведением $\vec{a}\cdot\bar{b}$ векторов $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ назывется число (скаляр), которое вычесляется по формуле

$$\vec{a}\cdot\bar{b}=|\vec{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\varphi \qquad (1.3),$$

где φ-угол, образованный векторами $\vec{a}$ и $\bar{b}$.

Из формулы (1.3) вытекает неравенство $\vec{a}\cdot\bar{b}\le|\vec{a}|\cdot|\bar{b}|$

Для вычисления скалярного произведения двух векторв $\vec{a}$ и $\bar{b}$ заданных в координатной форме, существует еще одна формула

$$\vec{a}\cdot\bar{b}=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+a_3\cdot b_3 \qquad (1.4)$$

Из формулы (1.3) и (1.4) легко получить формулу для вычисления косинуса угла φ между векторами $\vec{a}$ и $\bar{b}$, т.е.

$$\cos\varphi=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}} \qquad (1.5)$$

Из формулы (1.3) следует, что векторы $\vec{a}$, $\bar{b}$, является коллинеарными тогда и только тогда, когда $\vec{a}\cdot\bar{b}=|\vec{a}|\cdot|\bar{b}|$.

Отметим, что формулы (1.2) – (1.5) обобщаются на случай векторов $\vec{a}$ и $\bar{b}$, заданных в $n-$ мерном пространстве (где $n\ge2$).

1. Решить уравнение

$$\sqrt{(x+y)^2+(2x-y)^2+1}+\sqrt{(2y-x)^2+(y+1)^2+9}=\sqrt{9y^2+(2x+1)^2+16} \quad (1)$$

Решение. Положим $\vec{a}(x+y);\ 2x-y;\ 1)$ и $\vec{b}(2y-x; y+1; 3)$. Тогда $|\vec{a}|=\sqrt{(x+y)^2+(2x-y)^2+1}$ и $|\vec{b}|=\sqrt{(2y-x)^2+(y+1)^2+9}$. Пусть $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$, тогда $\vec{c}(3y; 2x+1; 4)$ и $|\vec{c}|=\sqrt{9y^2+(2x+1)^2+16}$.

В таком случае из уравнения (1) вытекает равенство $\vec{a}\cdot\bar{b}=|\vec{a}|\cdot|\bar{b}|$.

Следовательно, векторы $\vec{a}$ и $\bar{b}$ являются коллинеарными. В этой связи имеет место $\frac{x+y}{2y-x}=\frac{2x-y}{y+1}=\frac{1}{3}$. Отсюда получаем систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{x+y}{2y-x}=\dfrac{1}{3}\\[2mm] \dfrac{2x-y}{y+1}=\dfrac{1}{3}\end{cases} \text{ или } \begin{cases}4x+y=0\\ 6x-4y=1\end{cases}$$

Корнями последней системы уравнений являются $x=\frac{1}{22}$ и $y=-\frac{2}{11}$.

Ответ: $x=\frac{1}{22}$, $y=-\frac{2}{11}$.

2. Решить неравенства $\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}+\sqrt{50-3x}\le12$ (2)

Решение. Областью допустимых значений переменных x в неравенстве (2) являются $\frac{3}{2}\le x\le\frac{50}{3}$.

Рассмотрим в трехмерном пространстве два вектора $\vec{a}(1;1;1)$ и $\vec{b}(\sqrt{x+1};\sqrt{2x-3};\sqrt{50-3x})$.

Поскольку, $\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}+\sqrt{50-3x}$, $|\vec{a}|=\sqrt{3}$ и $|\vec{b}|=\sqrt{x+1+2x-3+50-3x}=$ $=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$, то известное неравенство $\vec{a}\cdot\vec{b}\le|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$ принимает вид неравенства (2). Отсюда сделаем вывод, о том, что неравенство (2) справедливо для любого x из области допустимых значений.

Следовательно, решением неравенства (2) являются $\frac{3}{2} \le x \le \frac{50}{3}$.

Ответ: $\frac{3}{2} \le x \le \frac{50}{3}$.

3. Пусть $x_1 + x_2 + ... + x_n = 3,\ y_1 + y_2 + ... + y_n = 4$ и $z_1 + z_2 + ... + z_n = 5$.

Доказать, что $\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} + ... + \sqrt{x_n^2 + y_n^2 + z_n^2} \ge 5\sqrt{2}$ (3)

Доказательство. Рассмотрим в трехмерном пространстве n векторов $|\overrightarrow{a_k}|$ с координатами $(x_k; y_k; z_k)$, где $k = 1,2,...,n$. Тогда $|\overrightarrow{a_k}| = \sqrt{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2}$. Пусть $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + ... + \vec{a}_n$. Тогда $\vec{a}(x_1 + x_2 + ... + x_n;\ y_1 + y_2 + ... + y_n;\ z_1 + z_2 + ... + z_n) = \vec{a}(3;4;5)$ и $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$.

Так как в рассматриваемом примере неравенства (1.3) принимает вид $|\vec{a}_1| + |\vec{a}_2| + ... + |\vec{a}_n| \ge |\vec{a}|$ то после подстановки в него выражений для $|\vec{a}_1|, |\vec{a}_2|, ..., |\vec{a}_n|$ и $|\vec{a}|$ получаем неравенства (3).

4. Решить неравенство $\sqrt{\sin^4 x + 1} + \sqrt{\cos^4 x + 1} \le \sqrt{5}$ (4)

Решение. Введем в рассмотрение три вектора $\vec{a}(\sin^2 x;1), \vec{b}(\cos^2 x;1)$, и $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. Тогда $|\vec{a}| = \sqrt{\sin^4 x + 1}, |\vec{b}| = \sqrt{\cos^4 x + 1}, |\vec{c}| = \sqrt{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{5}$ и неравенства треугольника (1.1) принимает вид $\sqrt{\sin^4 x + 1} + \sqrt{\cos^4 x + 1} \ge \sqrt{5}$. Отсюда и из неравенства (4) получаем равенство $\sqrt{\sin^4 x + 1} + \sqrt{\cos^4 x + 1} = \sqrt{5}$, из которого следует, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарные.

Следовательно, имеет место $\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1$ или $tgx = \pm 1$. Корнями последнего уравнения являются $x = \frac{\pi}{4}(2k+1)$, где к – целое число.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4}(2k+1)$, где к – целое число.

5. Решить уравнение $2\sqrt{x-1} + 5x = \sqrt{(x^2+4)(x+24)}$ (5)

Решение. Область допустимых значений переменой x в уравнении (5) являются $x > 1$.

Пусть $\vec{a}(2; x)$ и $\vec{b}(\sqrt{x-1};5)$. Тогда $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2\sqrt{x-1} + 5x$ и $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = \sqrt{(x^2+4)(x+24)}$. Следовательно, уравнение (5) представляет собой равенство $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. Отсюда следует, что векторы $\vec{a}$ и $\bar{b}$ являются коллинеарными. В этой связи можно записать уравнение $\frac{2}{\sqrt{x-1}} = \frac{x}{5}$ (6)

Обозначим $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x-1}}$ и $g(x) = \frac{x}{5}$. Функция $y = f(x)$ является непрерывной и убывающей при $x > 1$, а функция $y = g(x)$ непрерывной и возрастающей на всей числовой оси OX. Поэтому уравнение (6) имеет не более одного корня. Подбором находим его единственный корень $x = 5$.

Ответ: $x = 5$.

6. Решить уравнение $\sqrt{15 - 12\cos x} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}\sin x} = 4$ (7)

Решение. Введем рассмотрение векторы $\vec{a}(\sqrt{3}\sin x; 2\sqrt{3} - \sqrt{3}\cos x)$ и $\vec{b}(2 - \sqrt{3}\sin x; \sqrt{3}\cos x)$, тогда $|\vec{a}| = \sqrt{15 - 12\cos x}$ и $|\vec{b}| = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}\sin x}$.

Пусть $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. В таком случае вектор $\vec{c}(c_1;c_2)$ имеет координаты $c_1 = \sqrt{3}\sin x + 2 - \sqrt{3}\sin x = 2$ и $c_2 = 2\sqrt{3} - \sqrt{3}\cos x + \sqrt{3}\cos x = 2\sqrt{3}$, а его длина равна $|\vec{c}| = \sqrt{4 + 12} = 4$.

Нетрудно видеть, что уравнение (7) представляет собой равенства, $|\vec{a}| + |\vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}|$. Следовательно, векторы $\vec{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарные, а еще точнее сонаправленые. А этот факт означает, что их одноименные координаты пропорциональны и их отношение больше нуля, т.е. имеет место система

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{3}\sin x}{2-\sqrt{3}\sin x} = \dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{3}\cos x}{\sqrt{3}\cos x}, \\ \dfrac{\sqrt{3}\sin x}{2-\sqrt{3}\sin x} > 0. \end{cases} \quad (8)$$

Из уравнения системы (8) следует $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 2$, $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x = 1$; $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = 1$ и $x = \frac{\pi}{3}(6n+1)$, где $n-$ целое число.

Так как $\sqrt{3}\sin x < 2$, то из неравенства $\frac{\sqrt{3}\sin x}{2-\sqrt{3}\sin x} > 0$ получаем неравенство $\sin x > 0$, которое выполняется для $x = \frac{\pi}{3}(6n+1)$, где $n-$ целое число. Следовательно, найденные значения x удовлетворяют системе (8) .

Ответ: $x = \frac{\pi}{3}(6n+1)$, где $n-$ целое число.

7. Найти минимальное значение функции

$F(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-4x+2y+5} + \sqrt{x^2+y^2+6x-4y+13}$

Решение. Представим функцию $F(x,y)$ в виде

$$F(x,y) = \sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2} + \sqrt{(x+3)^2+(y-2)^2} \quad (9)$$

Введем на плоскости вектора $\vec{a}, \vec{b}$ с координатами $(x-2; y+1)$ и $(x+3; y-2)$, соответственно. Так как $|\vec{a}| = \sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}$ и $|\vec{b}| = \sqrt{(x+3)^2+(y-2)^2}$, то из формулы (9) следует, что $F(x,y) = |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

Пусть $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, тогда координатами вектора $\vec{c}$ является $(-5;3)$ и $|\vec{c}| = \sqrt{5^2+3^2} = \sqrt{34}$.

Поскольку $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, то $|\vec{a}| + |\vec{b}| \ge |\vec{a} - \vec{b}|$ и $F(x,y) \ge \sqrt{34}$. Теперь необходимо показать, что полученная нижняя оценка функции $F(x,y)$ достижима, т.е. существуют такие значения $x = x_1$, и $y = y_1$, при которых функция $F(x,y)$ принимает значение $\sqrt{34}$.

Если $F(x,y) = \sqrt{34}$, то $|\vec{a}| + |\vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$, т.е. векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарные. Отсюда следует, что $\frac{x-2}{x+3} = \frac{y+1}{y-2}$ или $x = \frac{1-5y}{3}$. Положим $y_1 = -1$, тогда $x_1 = \frac{1-5y_1}{3} = 2$.

Если значения x_1 и y_1 подставить в (9), то $F(2,-1) = \sqrt{34}$. Следовательно, минимальное значение функции $F(x,y)$ равно $\sqrt{34}$.

Ответ: $F_{\min} = \sqrt{34}$.

В заключение хотелось бы сказать, что при решении сложных задач по математике, используется самые разнообразные нестандартные методы, большинство из которых трудно поддается классификации. Как правило, рассмотренные методы ориентированы на решении относительно узкого круга задач, однако их знание и умение ими пользоваться весьма необходимо для успешного решения математических задач повышенной сложности. В статье приведены задачи, решение которых базируется на применении оригинальных (эффективных, но сравнительно редко встречающих) методов.

Литература

1. *Арлазаров В. В., Татаринцев А. В., Тиханина И. Г., Чекалкин Н. С.* Сборник задач по математике для физико-математических школ. М., 2007.
2. *Аскарова М. А.* Векторды пайдалану арқылы теңдеулер мен теңсіздіктерді шешу. Учебное пособие. Алматы, 2013.
3. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Аналитическая геометрия. М, 2012.
4. *Олехник С. Н., Потапов М. К., Пасиченко П. И.* Уравнения и неравенства. Нестандартные методы решения. М., 2001.