Matrix algorithms for solving linear difference eguations with a small step
Imanaliev Z.[1], Ashirbayev B.[2] (Republic Kyrgyzstan)
Алгоритм решения линейного матричного разностного уравнения с малым шагом
Иманалиев З. К.[1], Аширбаев Б. Ы.[2] (Республика Кыргызстан)

[1]Иманалиев Замирбек Кирешеевич / Imanaliev Zamirbek Kiresheevich – кандидат технических наук, профессор;
[2]Аширбаев Бейшембек Ыбышевич / Ashirbayev Beyshembek Ybyshevich – кандидат физико-математических наук, доцент,
кафедра прикладной математики и информатики,
факультет информационных технологий,
Кыргызский государственный технический университет им. И. Раззакова, г. Бишкек

Аннотация: *матричные дифференциальные уравнения широко используются при решении различных задач в теории систем дифференциальных уравнений. Кроме того, они представляют значительный интерес в связи с решением различных прикладных задач в теории управления, в вариационном исчислении, в теории цепей и др.*
Данная работа посвящена исследованию матричного разностного уравнения с малым шагом.
Abstract: *matrix differential equations are widely used in solving various problems in the theory of differential equations. In addition, they are of considerable interest in connection with various applications in control theory, the calculus of variations in circuit theory and other.*
This work is devoted to the study of the matrix differential equation with a small step.

Ключевые слова: *переходная матрица, сингулярно-возмущенное матричное дифференциальное уравнение, системы с малым параметром, матрица простой структуры.*
Keywords*: transition matrix, the matrix is singular perturbed differential equation system with a small parameter, the matrix of simple structure.*

УДК 517. 926.7: 519.677

При построении алгоритмов оптимального управления для стационарной системы с малым параметром рассматривается сингулярно-возмущенное матричное дифференциальное уравнение вида [1, с. 25, 2, с. 5].

$$\mu\dot{X}(t) = AX(t) + X(t)A', \; X(0) = X_0. \qquad (1)$$

В работе будем рассматривать уравнение, которая является дискретным аналогом уравнения (1) вида

$$X(t+\mu) = AX(t) + X(t)A', \quad X(0) = X_0, \qquad (2)$$

где $X, A - (n \times n)$ матрицы, $t \in T_\mu = \{t: t = k\mu, k = 0, 1, \cdots, N-1\} \subset T = \{t: 0 \le t \le 1\}$, $N = \frac{1}{\mu}, \mu > 0 -$малый шаг, штрих обозначает транспонирование.

Исследования уравнений вида (2) является продолжением исследований авторов по дискретным задачам оптимального управления с малым шагом [3, с. 5512–5519, 4, с. 138-141, 5, с. 103-104].

Следует отметить, что уравнение (2) можно записать в виде системы линейных разностных уравнений. Если все матрицы в (2) имеют размерности $(n \times n)$, то размерность вектора решений будет n^2.

Предположим, что:

1. Матрица A является матрицей простой структуры [6, с. 246], и она не имеет нулевого собственного значения λ_i $(i = \overline{1,n})$.
2. Все собственные значения λ_i матрицы A удовлетворяют условию $|\lambda_i| < q_0 < 1$.

При выполнении условии 1 простую структуру будут иметь также матрицы A' и A^{-1}, их собственные значения совпадают [6, с. 253], и матрица A является невырожденной.

При выполнении условии 2 для матрицы A имеет место ограничение по норме [6, с. 255].

$$\|A^l\| \le C_0 q_0^l \; (C_0 \ge 1, l = 0, 1, 2, \cdots). \qquad (3)$$

ТЕОРЕМА. Матричное решение уравнения (2) дается формулой

$$X(t) = \left(A\sqrt[k]{X(0)} + \sqrt[k]{X(0)}A'\right)^k, \qquad (4)$$

и оно имеет оценку

$$\|X(t)\| \le Mq_0^k \; (M - const, k = 1, 2, 3, \cdots). \qquad (5)$$

При этом, для р кратных малых шагов $\tau = p\mu$ справедливы соотношения

$$X(t+\tau) = \left(A\sqrt[k]{X(\tau)} + \sqrt[k]{X(\tau)}A'\right)^k, \qquad (6)$$

$$lim_{\mu \to 0} X(t+\tau) = X(t). \qquad (7)$$

Доказательство. Докажем первую часть теоремы. При $k=0, t=0$ из уравнения (2) будем иметь $X(\mu)=AX(0)+X(0)A'$. При $k=1, t=\mu$ имеем:

$X(2\mu)=AX(\mu)+X(\mu)A'=A(AX(0)+X(0)A')+(AX(0)+X(0)A')A'=$

$=A^2\mathrm{X}(0)+2\mathrm{AX}(0)A'+\mathrm{X}(0)(A')^2=\left(A\sqrt{X(0)}+\sqrt{X(0)}A'\right)^2.$

При $k=2, t=2\mu$:

$$\begin{aligned}X(3\mu)&=AX(2\mu)+X(2\mu)A'\\&=A(A^2\mathrm{X}(0)+2\mathrm{AX}(0)A'+\mathrm{X}(0)(A')^2)+\quad+(A^2\mathrm{X}(0)+2\mathrm{AX}(0)A'+\mathrm{X}(0)(A')^2)A'\\&=A^3\mathrm{X}(0)+2A^2\mathrm{X}(0)A'+\quad+A^2\mathrm{X}(0)A'+\mathrm{AX}(0)(A')^2+2\mathrm{AX}(0)(A')^2+\mathrm{X}(0)(A')^3=\\&=\left(A\sqrt[3]{X(0)}+\sqrt[3]{X(0)}A'\right)^3\end{aligned}$$

Аналогично для любого $k\le N-1, t=k\mu$ справедливы соотношения:

$$X(k\mu)=A^kX(0)+C_k^1A^{k-1}X(0)A'+\dots+C_k^mA^{k-m}(A')^m+\dots+$$
$$+X(0)(A')^k=\left(A\sqrt[k]{X(0)}+\sqrt[k]{X(0)}A'\right)^k.$$

Таким образом, в результате получим формулу (4), т. е.

$$X(t)=\left(A\sqrt[k]{X(0)}+\sqrt[k]{X(0)}A'\right)^k=\left[A(X(0))^{\frac{1}{k}}+(X(0))^{\frac{1}{k}}A'\right]^k. \qquad (8)$$

Теперь переходим к следующему этапу. С учетом (8) из равенства (2) имеем:

$$X(t+\mu)=X[(k+1)\mu]=A\left[A\big(X(0)\big)^{\frac{1}{k}}+\big(X(0)\big)^{\frac{1}{k}}A'\right]^k+$$

$$+\left[A\big(X(0)\big)^{\frac{1}{k}}+\big(X(0)\big)^{\frac{1}{k}}A'\right]^kA'=$$
$$=A[A^kX(0)+C_k^1A^{k-1}X(0)A'+\dots+C_k^mA^{k-m}(A')^m+\dots++X(0)(A')^k]+$$
$$+[A^kX(0)+C_k^1A^{k-1}X(0)A'+\dots+C_k^mA^{k-m}(A')^m+\dots++X(0)(A')^k]A'=$$
$$=A^k(AX(0)+X(0)A')+C_k^1A^{k-1}(AX(0)+X(0)A')A'+\dots+$$
$$+C_k^mA^{k-m}(AX(0)+X(0)A')(A')^m+\dots+(AX(0)+X(0)A')(A')^k=$$
$$=\left[A(X(\mu))^{\frac{1}{k}}+(X(\mu))^{\frac{1}{k}}A'\right]^k.$$

Тогда для матрицы $X(t+2\mu)$ получим

$$X(t+2\mu)=\left[A(X(2\mu))^{\frac{1}{k}}+(X(2\mu))^{\frac{1}{k}}A'\right]^k. \qquad (9)$$

Продолжая этот процесс для p кратных малых шагов $\tau=p\mu$ имеем:

$$X(t+\tau)=\left[A(X(\tau))^{\frac{1}{k}}+(X(\tau))^{\frac{1}{k}}A'\right]^k=\left(A\sqrt[k]{X(\tau)}+\sqrt[k]{X(\tau)}A'\right)^k.$$

Отсюда видно, что при $\mu\to 0, \tau\to 0$ имеет место предельное соотношение (7) ч. т. д.

Полученный результат позволяет сформулировать алгоритм решения матричного уравнения (2), который состоит в следующем:

1. Вводим данные: матрицу A, начальные условия $X(0)$, число шагов N.
2. Проверим выполнения условия 1 и 2. Если эти условия выполняются, то переходим к пункту 3, иначе к 1.
3. Вычислим решения уравнения (2) по формуле (4) при $k=0,1,\cdots,N-1$.

Пример. Решить уравнение (2) при:

$$A=\begin{pmatrix}0{,}2 & 1 & 0\\ 0 & 0{,}2 & 0\\ -0{,}1 & -0{,}1 & 0{,}1\end{pmatrix}, X(0)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}.$$

Собственные значения матрицы A: 0,1; 0,2; 0,2, условия 1 и 2 выполняются. Вычислим решения уравнения (2) при $N=5,\ k=0,1,\cdots,4$.

При: $k=0, t=0,\ X(\mu)=AX(0)+X(0)A'=\begin{pmatrix}-0{,}6 & 0 & 2{,}1\\ -0{,}4 & 0 & 1{,}3\\ -1 & -1{,}2 & 1{,}9\end{pmatrix};$

$k=1, t=\mu,\ X(2\mu)=\left(A\sqrt{X(0)}+\sqrt{X(0)}A'\right)^2=$

$$=\begin{pmatrix}-0.96+1.88\mathrm{i} & 0.36\mathrm{i} & 0.4800\ +\ 1.08\mathrm{i}\\ -0.34+0.44\mathrm{i} & 0.03+0.09\mathrm{i} & -0.01+0.45\mathrm{i}\\ -0.97+0.27\mathrm{i} & 0.03 & -0.1+1.17\mathrm{i}\end{pmatrix};$$

$k=2, t=2\mu,\ \ X(3\mu)=\left(A\sqrt[3]{X(0)}+\sqrt[3]{X(0)}A'\right)^3=$

$$=\begin{pmatrix}0.195 & 0.417 & 0.2554\\ 0.3429 & 0.3995 & 0.2532\\ -0.3107 & -0.3916 & -0.2101\end{pmatrix};$$

$k=3, t=3\mu,\ \ X(4\mu)=\left(A\sqrt[4]{X(0)}+\sqrt[4]{X(0)}A'\right)^4=$

$$= \begin{pmatrix} 0.5983 & 0.6528 & 0.2238 \\ 1.0401 & 1.1417 & 0.2416 \\ -0.5062 & -0.4733 & -0.1549 \end{pmatrix};$$

$$k = 4, t = 4\mu, \quad X(5\mu) = \left(A\sqrt[5]{X(0)} + \sqrt[4]{X(0)}A'\right)^5 =$$

$$= \begin{pmatrix} 0.9591 & 1.1460 & 0.2440 \\ 1.0401 & 1.1417 & 0.2416 \\ -0.5062 & -0.5669 & -0.1194 \end{pmatrix}.$$

Заключение

Предложенный алгоритм решения линейного матричного разностного уравнения применяется в исследовании матричного разностного уравнения с малым шагом. Результаты работ также будут использованы при построении решений дискретных задач оптимального управления с малым шагом.

Литература

1. *Иманалиев З. К.* Об одном методе оптимального управления сингулярно возмущенными системами с минимальной энергией // Вестник КНУ им Ж. Баласагына. - Вып 3, серия 5, Бишкек, 2005. - С. 25-30.
2. *Иманалиев З. К., Аширбаев Б. Ы.* Вывод одного из критериев управляемости сингулярно возмущенных систем оптимального управления // Известия КГТУ им И. Раззакова № 9, Бишкек, 2006. - С. 5-10.
3. *Иманалиев З. К., Аширбаев Б. Ы., Алымбаева Ж. А.* Исследование разностной задачи оптимального управления с малым шагом для однопродуктовой модели экономики // В сборнике XII всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ – 2014. Институт проблем управления им.В. А. Трапезникова РАН, 2014. С. 5512–5519.
4. *Иманалиев З. К., Аширбаев Б. Ы.,Осмонканов А. М.* Управление с минимальной энергией в дискретной задаче оптимального управления с малым шагом // Вестник КГУСТА, 2014. № 2. - С. 138 -141.
5. *Иманалиев З. К., Баракова Ж. Т.* Управление с минимальной энергией в системах со свободными конечными состояниями // Известия Волгоградского государственного технического университета, 2004. № 5. - С. 103-104.
6. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно-возмущенных уравнений. – Москва: Наука, 1973. – 272 с.