New in the method of direct integration
Aldabergenov A.
Новое в методе непосредственного интегрирования
Алдабергенов А. К.

Алдабергенов Абай Капанович / Aldabergenov Abay - кандидат технических наук, профессор,
кафедра энергетики и машиностроения,
Костанайский инженерно – экономический университет,
г. Костанай, Республика Казахстан

Аннотация: *как известно, метод непосредственного интегрирования рекомендуется только для расчета балок с небольшим числом участков. В данной работе впервые выведены универсальные формулы для определения констант интегрирования. В силу этого метод непосредственного интегрирования может быть использован для балок с любым числом участков. Это – научная новизна работы.*

Abstract: *as it is known, the method of direct integration is only recommended for the analysis of beams with a small number of sites. In this paper, first derived universal formula to determine the constants of integration. By virtue of this direct method of integration may be used for any number of beam portions. This is - the scientific novelty of the work.*

Ключевые слова: *балка; деформация; изгиб; уравнение; нагрузка.*
Keywords: *beam; deformation; bending; the equation; load.*

При поиске интегралов дифференциального уравнения изогнутой оси балки ($EI = const$)[1, с.205]:

$$EI\frac{d^2w}{dx^2} = -M \qquad (1)$$

в известных источниках используются следующие два метода: метод непосредственного интегрирования и метод начальных параметров. Число постоянных интегрирования зависит от количества участков. Определение их сопряжено со значительными трудностями вычислительного характера. Поэтому утвердилось мнение о том, что метод непосредственного интегрирования (А.В. Дарков, Сопротивление материалов,1969, стр. 323 и 334) неудобен для расчета балок с большим числом участков. Автор настоящей работы высказывает свое несогласие с этим утверждением.

Ниже будет приведен обоснование этому. Сведения объема вычислительных работ к минимуму всегда является актуальной проблемой. Она требует дополнительного исследования.

Для балок, состоящих из большого числа участков, применяется метод начальных параметров. В этом методе уменьшение числа постоянных интегрирования до двух проводилось вводом дополнительных условий [2, с.339]. Автор не согласен и с этим подходом. Ввод дополнительных условий – некорректный подход, напоминает некую подгонку. Поэтому в следующей работе будет показано получение уравнений деформаций балки без ввода каких – либо дополнительных условий и ограничений. Заметим, что здесь правильность метода начальных параметров не подвергается сомнению, лишь подчеркивается, что он получен, точнее универсальные уравнения деформаций получены с вводом дополнительных условий. Далее будет доказано, что ввод этих дополнительных условий теоретически обоснован.

Теперь перейдем к обоснованию несогласия с утверждением о неудобности метода непосредственного интегрирования. Рассмотрим балку, показанную на рисунке 1. Равномерно распределенная нагрузка не доходит до рассматриваемого сечения, т.е. прерывается. Начало координат общее для всех участков поместим на левом конце балки.

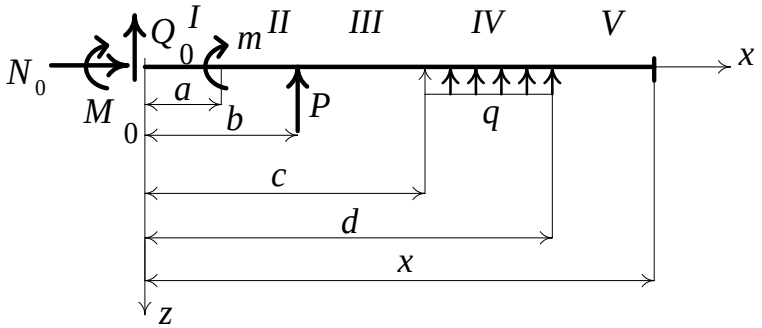

Рис. 1. Изгиб балки

Выражения изгибающих моментов на участках балки запишутся так:

$$M_1 = M_0 + Q_0 x;\ M_2 = M_0 + Q_0 x + m;\ M_4 = M_0 + Q_0 x + m + P(x-b) + q\frac{(x-c)^2}{2};$$

$$M_3 = M_0 + Q_0 x + m + P(x-b);\quad M_5 = M_0 + Q_0 x + m + P(x-b) + q(d-c)(x-\frac{c+d}{2}). \qquad (2)$$

Интеграл уравнения (1), записанного с учетом (2), для отдельных участков будет иметь вид:

а) $EI\theta_1 = -M_0 x - Q_0\frac{x^2}{2} + C_1$; *б)* $EI\theta_2 = -M_0 x - Q_0\frac{x^2}{2} - mx + C_2$

в) $EI\theta_3 = -M_0 x - Q_0\frac{x^2}{2} - mx - P\frac{x^2}{2} + Pbx + C_3$;

г) $EI\theta_4 = -M_0 x - Q_0\frac{x^2}{2} - mx - P\frac{x^2}{2} + Pbx - q(\frac{x^3}{6} - \frac{cx^2}{2} + \frac{xc^2}{2}) + C_4$;

д) $EI\theta_5 = -M_0 x - Q_0\frac{x^2}{2} - mx - P\frac{x^2}{2} + Pbx - q(d-c)\frac{x^2 - dx - cx}{2} + C_5 \qquad (3)$

Для определения постоянных интегрирования используем условия задачи в местах гладкого и непрерывного сопряжения участков:

1) при $x = 0$ $\theta_1 = \theta_0$; 2) при $x = a$ $\theta_1 = \theta_2$; 3) при $x =$ $\theta_2 = \theta_3$;

4) при $x = c$ $\theta_3 = \theta_4$. 5) при $x = d$ $\theta_4 = \theta_5$. (4)

ВВодя (3) в условия (4) находим:

$$C_1 = EI\theta_0;\qquad C_2 = EI\theta_0 + ma;\qquad C_3 = EI\theta_0 + ma - P\frac{b^2}{2};$$

$$C_4 = EI\theta_0 + ma - P\frac{b^2}{2} + q\frac{c^3}{6};\quad C_5 = EI\theta_0 + ma - P\frac{b^2}{2} - q\frac{d^3 - c^3}{6}. \qquad (5)$$

Обратите особое внимание на формулу для определения постоянного интегрирования последнего участка (5). В ней полностью сохранены формулы для определения константов предыдущих участков. Это означает, что постоянные данного участка можно найти из формулы последнего участка, учитывая лишь левые от него силы. Поэтому ее назовем универсальной формулой для постоянных интегрирования. При этом все эти постоянные выражаются через константу (угол поворота) первого участка.После анализа формул системы (5) можно их обобщить и в общем виде для участка последующего за распределенной нагрузкой записать так:

$$C_n = EI\theta_0 + m_i \cdot a_i - P_i \cdot \frac{b_i^2}{2} - q_i \cdot \frac{d_i^3 - c_i^3}{6}, \qquad (6)$$

где, $n-$номер участка; $i-$ номер нагрузки; a_i – расстояние от начала координат до сосредоточенного момента m_i; b_i – расстояние от начала координат до сосредоточенной силы P_i; c_i и d_i – расстояния от начала координат до начала и конца распределенной нагрузки q_i. Для участка с распределенной нагрузкой надо положить $d_i = 0$. Правильность этой формулы подтверждена на случаях, когда на балку действуют несколько сосредоточенных моментов, сил и распределенных нагрузок.

Внося значения постоянных (5) в уравнения (3),получим:

а) $EI\theta_1 = EI\theta_0 - M_0 x - Q_0\frac{x^2}{2}$; *б)* $EI\theta_2 = EI\theta_0 - M_0 x - Q_0\frac{x^2}{2} - m(x-a)$;

в) $$EI\theta_3 = EI\theta_0 - M_0 x - Q_0 \frac{x^2}{2} - m(x-a) - P\frac{(x-b)^2}{2};$$

г) $$EI\theta_4 = EI\theta_0 - M_0 x - Q_0 \frac{x^2}{2} - m(x-a) - P\frac{(x-b)^2}{2} - q\frac{(x-c)^3}{6};$$

д) $$EI\theta_5 = EI\theta_0 - M_0 x - Q_0 \frac{x^2}{2} - m(x-a) - P\frac{(x-b)^2}{2} -$$
$$- q(d-c)\frac{x^2 - cx - dx}{2} - q\frac{d^3 - c^3}{6}. \qquad (7)$$

Проинтегрируем систему уравнений (7) еще раз. Появятся дополнительно пять постоянных D_i:

$$EIw_1 = EI\theta_0 x - M_0 \frac{x^2}{2} - Q_0 \frac{x^3}{6} + D_1;$$

$$EIw_2 = EI\theta_0 x - M_0 \frac{x^2}{2} - Q_0 \frac{x^3}{6} - m\frac{x^2}{2} + ma \cdot x + D_2;$$

$$EIw_3 = EI\theta_0 x - M_0 \frac{x^2}{2} - Q_0 \frac{x^3}{6} - m\frac{x^2}{2} + ma \cdot x - P\frac{x^3}{6} + Pb\frac{x^2}{2} - P\frac{b^2}{2}x + D_3;$$

$$EIw_4 = EI\theta_0 x - M_0 \frac{x^2}{2} - Q_0 \frac{x^3}{6} - m\frac{x^2}{2} + ma \cdot x - P\frac{x^3}{6} + Pb\frac{x^2}{2} - P\frac{b^2}{2}x -$$
$$- q\frac{x^4}{24} + qc\frac{x^3}{6} - qc^2\frac{x^2}{4} + q\frac{c^3}{6}x + D_4;$$

$$EIw_5 = EI\theta_0 x - M_0 \frac{x^2}{2} - Q_0 \frac{x^3}{6} - m\frac{x^2}{2} + ma \cdot x - P\frac{x^3}{6} + Pb\frac{x^2}{2} - P\frac{b^2}{2}x -$$
$$- q(d-c)\left(\frac{x^3}{6} - c\frac{x^2}{4} - d\frac{x^2}{2}\right) - \frac{d^3 - c^3}{6}x + D_5.$$

Используя условия на границах участков находятся постоянные D_i. Не повторяя рассуждений, совершенно аналогичных тем, какие были высказаны при нахождении постоянных C_i, запишем:

$$D_n = EIw_0 - m_i \cdot \frac{a_i^2}{2} + P_i \cdot \frac{b_i^3}{6} + q_i \cdot \frac{d_i^4 - c_i^4}{24}. \qquad (9)$$

Замечено, что между постоянными интегрирования отдельных участков существует строгая взаимосвязь. А в формулах для определения постоянных интегрирования (6) и (9) наблюдаются устойчивые закономерности: а) в формулах для данного участка полностью сохраняются нагрузки предыдущих участков; б) каждый вид нагрузки входит в эти уравнения в виде слагаемого определенного типа; в) в формулах содержатся только те силы, которые расположены на левее рассматриваемого участка. В практических расчетах нет необходимости в вычислении этих коэффициентов. Например, после ввода констант C_i по формуле (5) в уравнения (3) они сами упорядочатся, и в окончательных уравнениях остается только постоянное $EI\theta_0$.

Таким образом, в работе получены универсальные формулы для определения констант интегрирования (6) и (9). По этим формулам можно вычислить постоянные интегрирования любого уравнения (участка). При любом количестве участков балки число постоянных будет равно двум (по деформациям) $EI\theta_0$ и EIw_0, что сильно облегчает решение задачи. Отсюда следует, что методом непосредственного интегрирования можно пользоваться для расчета любой балки, не зависимо от количества участков. Такое утверждение приводится впервые, и, по мнению автора, может быть рассмотрено, как научное открытие (научная новизна).

Литература

1. *Алдабергенов А. К.* Сопротивленире материалов с основами теории упругости. – Алматы : Рауан, 1994. – 468с.
2. *Писаренко Г. С.* Сопротивление материалов. – Киев: Из –во тех.литературы,1963. – 792с.