Регуляризирующий оператор для решения нелинейного интегрального уравнения первого рода
Усенов И. А.

Усенов Изат Абдраевич
кандидат физико-математических наук, доцент,
Кыргызский Национальный Университет им. Ж. Баласагына,
г. Бишкек, Кыргызская Республика

Аннотация: *в работе построен оператор регуляризации для решения одного класса нелинейного интегрального уравнения первого рода в пространстве квадратично-суммируемых функций.*
Abstract: *we construct a regularization operator for a class of non-linear integral equations of the first kind in the space of square-integrable functions.*

Ключевые слова: *интегральный оператор, регуляризация, сходимость, пространство квадратично суммируемых функций.*
Keywords: *integral operator, regularization, the convergence space of square-integrable functions.*

УДК 519.683.5

1. Постановка задач

В $L_{2[0,1]}$ рассмотрим интегральное уравнение первого рода вида

$$\int_0^1 K(t,s)z(s)ds = u(t) + \int_0^1 H(t,s)M(s,z(s))ds, \tag{1}$$

где 1. $K(t,s) = K(s,t) \in L_{2[0,1]\times[0,1]}$, $\int_0^1\int_0^1 K(t,s)z(s)z(t)dsdt > 0,\ u(t) \in L_{2[0,1]}$;

2. $H(t,s) \in L_{2[0,1]\times[0,1]}$ удовлетворяет равенству

$$H(t,s) = \int_0^s K(t,v)dv; \tag{2}$$

3. $M(s,z(s)) \in C_{[0,1]\times R}$ истокопредставимо в виде

$$M(s,z(s)) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varphi_j(s)}{\lambda_j^{\sigma+1}} \int_0^1 M_1(v,z(v))\varphi_j(v)dv, \tag{3}$$

где $0 < \sigma < 1,\ M_1(v,z(v)) \in C_{[0,1]\times R}$ и удовлетворяет условию Липшица по z, т.е.

$$\left\| M_1(v,z_1(v)) - M_1(v,z_2(v)) \right\|_{L_{2[0,1]}} \le N \left\| z_1(v) - z_2(v) \right\|_{L_{2[0,1]}}. \tag{4}$$

Предположим, что

4. При $u(t) = u_0(t) \in L_{2[0,1]}$ уравнение имеет единственное решение $z_0(t) \in L_{2[0,1]}$;

5. Вместо $u_0(t) \in L_{2[0,1]}$ нам известно $u_\delta(t) \in L_{2[0,1]}$, такое, что

$$\left\| u_\delta(t) - u_0(t) \right\|_{L_{2[0,1]}} \le \delta, \text{ где } \delta \text{ - параметр погрешности.} \tag{5}$$

2. Регуляризация

Для явного представления решения используем фундаментальные функции Э. Шмидта.

Пусть $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ ортонормированные собственные функции ядра $K(t,s)$, соответствующие собственным значениям $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$.

В силу теоремы Гильберта-Шмидта, имеем

$$\int_0^1 K(t,s)z(s)ds = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_k}{\lambda_k}\varphi_k(t), \quad z_k = \int_0^1 z(s)\varphi_k(s)ds. \tag{6}$$

Функцию $u(t) \in L_{2[0,1]}$ разлагаем в ряд Фурье по системе $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ функции

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \varphi_k(t), \quad u_k = \int_0^1 u(s)\varphi_k(s)ds. \tag{7}$$

Используя (2), (3), (6) и (7) из (1) имеем, учитывая ортонормированность собственных функций

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_k}{\lambda_k}\varphi_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \varphi_k(t) + \int_0^s \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(t)\varphi_k(s)}{\lambda_k^{\sigma+1}} M_1(v, z(v))dsdv. \tag{8}$$

Меняя порядок интегрирования в (8), получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_k}{\lambda_k}\varphi_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \varphi_k(t) + \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(t)\varphi_k(s)}{\lambda_k^{\sigma+1}} M_2(s, z(s))ds, \;\; M_2(s, z(s)) = \int_0^s M_1(v, z(v))dv \cdot \tag{9}$$

Наряду с уравнением (9) рассмотрим уравнение второго рода вида

$$\alpha z_\alpha(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_k}{\lambda_k}\varphi_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \varphi_k(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k}{\lambda_k^{\sigma+1}}\varphi_k(t), \;\; M_k = \int_0^1 M_2(s, z(s))\varphi_k(s)ds \cdot \tag{10}$$

Обе части (10) умножим на функцию $\varphi_k(t)$ и интегрируем от 0 до 1 и, учитывая ортонормированность собственных функции $\varphi_k(t)$, получаем

$$\alpha z_k + \frac{z_k}{\lambda_k} = u_k + \frac{M_k}{\lambda_k^{\sigma+1}}. \tag{11}$$

Отсюда

$$z_k = \frac{\lambda_k u_k}{1+\alpha\lambda_k} + \frac{M_k}{\lambda_k^{\sigma}(1+\alpha\lambda_k)}. \tag{12}$$

Подставляя (12) в (10), имеем

$$z(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k u_k}{1+\alpha\lambda_k}\varphi_k(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k}{\lambda_k^{\sigma}(1+\alpha\lambda_k)}\varphi_k(t). \tag{13}$$

Покажем, что:

1. Элемент $\tilde{z}_0(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k u_k}{1+\alpha\lambda_k}\varphi_k(t) \in L_{2[0,1]}$ при любом $\alpha > 0$, на самом деле

$$\left\|\tilde{z}_0(t)\right\|_{L_{2[0,1]}} = \left\|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k u_k}{1+\alpha\lambda_k}\varphi_k(t)\right\|_{L_{2[0,1]}} \le \frac{1}{\alpha}\|u\|_{L_{2[0,1]}}; \tag{14}$$

2. Оператор $K_\alpha(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k}{\lambda_k^{\sigma}(1+\alpha\lambda_k)}\varphi_k(t) : L_{2[0,1]} \to L_{2[0,1]}$ при любом $\alpha > 0$ и ограничен при $\alpha \to 0$. Действительно: Если $\lambda_0 = \frac{1-\sigma}{\alpha\sigma}$, то $\frac{1}{\lambda_0^{\sigma-1}(1+\alpha\lambda_0)} = (1-\sigma)^{1-\sigma}\sigma^{\sigma}\alpha^{\sigma-1}$ и $\frac{1}{\lambda_0^{\sigma-1}(1+\alpha\lambda_0)} \cdot \frac{1}{\lambda_0} = (1-\sigma)^{-\sigma}\sigma^{\sigma+1}\alpha^{\sigma}$. Следовательно $\frac{1}{\lambda_k^{\sigma}(1+\alpha\lambda_k)} \le (1-\sigma)^{-\sigma}\sigma^{\sigma+1}\alpha^{\sigma}$.

Оценим норму

$$\left\|K_\alpha(z)\right\|_{L_{2[0,1]}} \le \left\|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k}{\lambda_k^{\sigma}(1+\alpha\lambda_k)}\varphi_k(t)\right\|_{L_{2[0,1]}} \le (1-\sigma)^{-\sigma}\sigma^{\sigma+1}\alpha^{\sigma}\left(K_0 + N\|z(s)\|_{L_{2[0,1]}}\right), \tag{15}$$

где $K_0 = \sup\limits_{0\le t\le 1}\|M_2(t,0)\|_{L_{2[0,1]}}$.

Допустим, что постоянная Липшица N удовлетворяет условию $N < (1-\sigma)^{\sigma}\sigma^{-(\sigma+)1}\alpha^{-\sigma}$. Тогда оператор $K_\alpha(z)$ будет ограничен при $\alpha \to 0$.

3. Оператор K_α при любом $z_1, z_2 \in H$ удовлетворяет условию Липшица

$$\left\|K_\alpha(z_1)-K_\alpha(z_2)\right\|_{L_{2[0,1]}}\le(1-\sigma)^{-\sigma}\sigma^{\sigma+1}\alpha^\sigma N\left\|z_1(t)-z_2(t)\right\|_{L_{2[0,1]}}. \qquad (16)$$

Следовательно, оператор K_α является сжимающим.

Нелинейное уравнение (13) решаем методом последовательных приближений. За нулевое приближение возьмем элемент $\tilde{z}_0(t)$.

Остальные приближения определяются по формуле

$$z_j(t)=K_\alpha(z_{j-1}),\quad j=1,2,\ldots . \qquad (17)$$

По методу математической индукции можно доказать, что при $j\ge 2\in N$ справедливо неравенство

$$\left\|z_j(t)-z_{j-1}(t)\right\|_{L_{2[0,1]}}\le\left((1-\sigma)^{-\sigma}\sigma^{\sigma+1}\alpha^\sigma N\right)^j\left(K_0N^{-1}+\left\|\tilde{z}_0(t)\right\|_{L_{2[0,1]}}\right). \qquad (18)$$

Следовательно, условие $q=(1-\sigma)^{-\sigma}\sigma^{\sigma+1}\alpha^\sigma N<1$ обеспечивает сходимость последовательности приближения, т.е. $\lim\limits_{j\to\infty}z_j(t)=z_\alpha(t)$.

В (17) переходя к пределу при $j\to\infty$ и используя непрерывность функции $M_2(s,z(s))$, имеем

$$z_\alpha(t)=\sum\nolimits_{k=1}^\infty\frac{\lambda_k u_k}{1+\alpha\lambda_k}\varphi_k(t)+\sum\nolimits_{k=1}^\infty\frac{M_k}{\lambda_k^\sigma(1+\alpha\lambda_k)}\varphi_k(t). \qquad (19)$$

Таким образом, доказано.

Теорема 1. Пусть: 1. выполняются условия 1),2),3). 2. Постоянная Липшица N для функции $M_1(v,z(v))\in C_{[0,1]\times R}$ удовлетворяет условию $N<(1-\sigma)^\sigma\sigma^{-(\sigma+)1}\alpha^{-\sigma}$. Тогда при любом $u(t)\in L_{2_{[0,1]}}$ и $\alpha>0$ уравнение (13) имеет единственное решение $z_\alpha(t)\in L_{2_{[0,1]}}$.

Теорема 2. Пусть: 1. выполнены все условия теоремы 1; 2) точное решение уравнения (1) представимо в виде $z_0(t)=\sum\nolimits_{k=1}^\infty\frac{v_k}{\lambda_k^{\beta+1}}\varphi_k(t),\ v_k=\int\limits_0^1 v(s)\varphi_k(s)ds,\ v(s)\in L_{2_{[0,1]}},\ 0<\beta<1$. Тогда решение $z_\alpha^0(t)$ уравнения (13) при $u(t)=u_0(t)$ сходится к точному решению $z_0(t)$ уравнения (1) при $\alpha\to 0$.

Доказательство: В силу (19) решение $z_\alpha^0(t)$ запишется

$$z_\alpha^0(t)=\sum\nolimits_{k=1}^\infty\frac{\lambda_k u_{0k}}{1+\alpha\lambda_k}\varphi_k(t)+\sum\nolimits_{k=1}^\infty\frac{1}{\lambda_k^\sigma(1+\alpha\lambda_k)}\int\limits_0^1 M_2(s,z_\alpha^0(s))\varphi_k(s)ds\varphi_k(t). \qquad (20)$$

Тогда предполагаемое точное решение уравнения (1) представимо в виде

$$z_0(t)=\sum\nolimits_{k=1}^\infty\lambda_k u_{0k}\varphi_k(t)+\sum\nolimits_{k=1}^\infty\frac{1}{\lambda_k^\sigma}\int\limits_0^1 M_2(s,z_0(s))\varphi_k(s)ds\varphi_k(t). \qquad (21)$$

Оценивая норму $\left\|z_\alpha^0(t)-z_0(t)\right\|_{L_{2[0,1]}}$, имеем, учитывая коэффициенты Фурье

$$u_{0k}=\frac{z_{0k}}{\lambda_k}-\frac{1}{\lambda_k^{\sigma+1}}\int\limits_0^1 M_2(s,z_0(s))\varphi_k(s)ds,\ z_{0k}=\frac{v_k}{\lambda_k^{\beta+1}}$$

$$\left\|z_\alpha^0(t)-z_0(t)\right\|_{L_{2[0,1]}}\le(1-\beta)^{1-\beta}\beta^\beta\alpha^\beta\left\|v_k\right\|_{L_{2[0,1]}}+(1-\sigma)^{-\sigma}\sigma^{\sigma+1}\alpha^\sigma N\left\|z_\alpha^0(t)-z_0(t)\right\|_{L_{2[0,1]}}. \qquad (22)$$

В силу, что $q=(1-\sigma)^{-\sigma}\sigma^{\sigma+1}\alpha^\sigma N<1$ из (22), имеем

$$\left\|z_\alpha^0(t)-z_0(t)\right\|_{L_{2[0,1]}}\le\frac{q_1\alpha^\beta}{1-q},\qquad q_1=(1-\beta)^{1-\beta}\beta^\beta\left\|v_k\right\|_{L_{2[0,1]}}. \qquad (23)$$

Скорость сходимости удовлетворяет условию (23).

Далее рассмотрим условие (5). Решение $z_\alpha^\delta(t)$ при $u(t)=u_\delta(t)$ представимо в виде

$$z_\alpha^\delta(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k u_{\delta k}}{1+\alpha\lambda_k}\varphi_k(t)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k^\sigma\left(1+\alpha\lambda_k\right)}\int_0^1 M_2(s,z_\alpha^\delta(s))\varphi_k(s)ds\varphi_k(t)$$

Оценивая разность $z_\alpha^\delta(t)-z_0(t)$, имеем

$$\left\|z_\alpha^\delta(t)-z_0(t)\right\|_{L_{2[0,1]}}\le\left\|z_\alpha^\delta(t)-z_\alpha^0(t)\right\|_{L_{2[0,1]}}+\left\|z_\alpha^0(t)-z_0(t)\right\|_{L_{2[0,1]}}\le\frac{1}{1-q}\left(\frac{\delta}{\alpha}+q_1\alpha^\beta\right). \qquad (24)$$

Минимизируя правую часть неравенства (24), определяем зависимость параметра регуляризации α от погрешности δ, т.е.

$$\alpha(\delta)=\left(\delta/q_1\beta\right)^{1/\beta+1}. \qquad (25)$$

Найденное значение α подставим в правую часть (24), имеем

$$\left\|z_{\alpha(\delta)}^\delta(t)-z_0(t)\right\|_{L_{2[0,1]}}\le q_2\delta^{\beta/\beta+1},\quad q_2=\frac{1}{1-q}\left(q_1\beta\right)^{1/\beta+1}\left(1+\beta^{-1}\right). \qquad (26)$$

Отсюда следует, что при $\delta\to 0$ $z_{\alpha(\delta)}^\delta(t)\to z_0(t)$ по норме $L_{2[0,1]}$, и $z_{\alpha(\delta)}^\delta(t)$ является приближенным устойчивым решением уравнения (1).

Скорость сходимости удовлетворяет неравенству (26).

Теорема 3. Пусть:1. Выполняются все условия теоремы 2. 2. Элемент $u_\delta(t)$ удовлетворяет условию (5). 3. Параметр $\alpha(\delta)$ выбран по формуле (25). Тогда решение уравнения (13) $z_\alpha^\delta(t)$ при $\delta\to 0$ сходится к точному решению уравнения (1). Скорость сходимости удовлетворяет условию (26).

Заключение

Обоснование метода регуляризации, предлагаемого в данной работе, заключается в следующих результатах исследования:

1) построен регуляризирующий оператор в $L_{2[0,1]}$;
2) доказана сходимость регуляризированного решения к точному решению исходного уравнения;
3) получен выбор параметра регуляризации в зависимости от погрешности правой части;
4) получена оценка скорости сходимости регуляризированного решения к точному решению.

Литература

1. *Лаврентьев М. М.* О некоторых некорректных задачах математической физики. - Новосибирск, 1962.
2. *Саадабаев А.* Приближенные методы решения нелинейных интегральных и операторных уравнений 1-го рода. - Бишкек, 1997.
3. *Усенов И. А.* О регуляризируемости решения нелинейного интегрального уравнения первого рода // Материалы международной научной конференции «Актуальные проблемы математики и информатики», посвященная 80-летию со дня рождения академика НАН РК Касымова К. А., Алматы, Казахстан, 2015, стр. 124-125.