Регуляризация системы нелинейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода

Каракеев Т. Т.[1], Бугубаева Ж.[2]

[1]Каракеев Таалайбек Тултемирович / Karakeev Taalaibek Tultemirovich – профессор,
доктор физико-математических наук
кафедра информационных технологий и программирования;
[2]Бугубаева Жумгалбубу / Bugubaeva Zhumgalbubu – старший преподаватель,
кафедра информатики и вычислительной техники,
Кыргызский Национальный университет им. Ж. Баласагына, г. Бишкек, Кыргызская Республика

Аннотация: *в работе изучаются вопросы регуляризации системы нелинейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода с невозрастающей коэффициентной функцией при искомой функции. Получен регуляризирующий оператор, доказана равномерная сходимость регуляризованного решения к точному решению рассматриваемой системы в шаре.*

Abstract: *in work the questions of regularization of system of the nonlinear integrated equations of Voltaire of the third kind with non increasing coefficient function at required function are studied. The regularizing operator is received, uniform convergence of the regularized solution to the exact solution of the considered system in a sphere is proved.*

Ключевые слова*: уравнение Вольтерра, малый параметр, равномерная сходимость.*
Keywords: *Volterra equations, small parameter, uniform convergence.*

Рассмотрим систему нелинейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода

$$p(x)u(x) + \int\limits_0^x N_0\big(x,t,u(t)\big)\,dt = g(x), \qquad (1)$$

где искомая вектор-функция $u(x) \in C_n[0,b]$, $N_0\big(x,t,u(t)\big) = K(x,t)u(t) + N\big(x,t,u(t)\big)$, $p(x), g(x)$, $K(x,t), N\big(x,t,u(t)\big)$ - известные функции, которые удовлетворяют условиям:

а) $p(x) \in C^2[0,b]$, $p^{(i)}(b) = 0, i = 0, 1$, $p(x) > 0\ \forall x \in [0,b)$, $p(x)$- скалярная невозрастающая функция;

б) $g(x) = colon\big(g_1(x), \dots, g_n(x)\big), g_i(x) \in C[0,b], C_0p(x) + C_1g_i(x) \geq 0, i = \overline{1,n},\ 0 < C_0, C_1 = const$;

в) $K(x,t) -\ n{\times}n$ – мерная матричная функция, $K_{i,j}(x,t) \in C(D),\ K_{i,j}(x,x) \geq 0, i,j = \overline{1,n}, D = \{(x,t)/\ 0\ \leq t \leq x \leq b\}$;

г) $G(x) -\ n{\times}n$ – матричная функция,

$$G_{ij}(x) = \begin{cases} K_{i,j}(x,x), & j \neq i, \\ C_0p(x) + K_{i,i}(x,x) + C_1g_i(x), & i =\ j, \quad i,j = \overline{1,n}, \end{cases}$$

$\|G(x)\| \leq C_2\lambda(x)$, $\|\cdot\|$ - норма матрицы, $\lambda(x) \geq d_1,\ 0 < d_1, C_2 = const$, $\lambda(x) = \min\limits_{1\leq i\leq n} \lambda_i(x)$, $\lambda_i(x)$ $(i = \overline{1,n})$ – собственные значения матрицы $[G(x) + G^*(x)]/2$, $G^*(x)$ – сопряженная матрица к матрице $G(x)$;

д) $N\big(x,t,u(t)\big) -$ вектор-функция, $N\big(x,t,u(t)\big) \in C_n^{1,0,1}(D \times R^1)$, $N(x,x,u) = 0$, $N_x(x,t,0) = 0$.

Действуя оператором $I + C_0J + C_1T$, где I – единичный оператор, J, T – операторы Вольтерра вида $(Jv)(x) = \int_0^x v(t)dt$, $(Tv)(x) = \int_0^x v(t)u(t)dt$, $v(x) = diag\big(v_1(x), \dots, v_n(x)\big)$ из системы (1) получим [3]

$$p(x)u(x) + \int\limits_0^x G(t)u(t)dt = \int\limits_0^x M\big(x,t,u(t)\big)dt + C_1\Bigg[\int\limits_0^x p(t)u^2(t)dt +$$

$$+\int\limits_0^x \int\limits_t^x (Bu)(s,t)\,u(t)dsdt + \int\limits_0^x \int\limits_t^x (B_0u)(s)\,N\big(s,t,u(t)\big)dsdt\Bigg] + f(x), \qquad (2)$$

где $(Bu)(s,t) = \big(K_{ij}(s,t)u_i(s)\big), i,j = \overline{1,n}$, $M\big(x,t,u(t)\big) = -N\big(x,t,u(t)\big) -$

$$-C_0\int\limits_t^x N\big(s,t,u(t)\big)\,ds + \left[K(t,t) - K(x,t) - C_0\int\limits_t^x K(s,t)ds\right]u(t),$$

$(B_0u)(x) = diag\big(u_1(x), \dots, u_n(x)\big), f(x) = g(x) + C_0\int_0^x g(t)dt$

Рассмотрим систему нелинейных интегральных уравнений

$$\big(\varepsilon + p(x)\big)u_\varepsilon(x) + \int_0^x G(t)\, u_\varepsilon(t)dt = \int_0^x M\big(x, t, u_\varepsilon(t)\big)dt + \Bigg[\int_0^x p(t)u_\varepsilon^2(t)dt +$$

$$+ \int_0^x \int_t^x (Bu_\varepsilon)(s,t)\, u_\varepsilon(t)dsdt + \int_0^x \int_t^x (B_0u_\varepsilon)(s)\, N\big(s,t,u_\varepsilon(t)\big)dsdt\Bigg] +$$

$$+f(x) \equiv (Au_\varepsilon)(x), \qquad (3)$$

где ε - малый параметр из интервала (0,1). Обозначим через $(H_\varepsilon u)(x)$ оператор

$$(H_\varepsilon u)(x) \equiv -\frac{1}{\varepsilon + p(x)} exp\left(-\int_0^x \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)}ds\right)u(x) +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon + p(x)}\int_0^x exp\left(-\int_t^x \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)}ds\right)\frac{G(t)}{\varepsilon + p(t)}[u(x) - u(t)]dt.$$

Справедлива следующая [2, стр. 55]

Лемма. Если выполняются условия *а) - д)* и $u(x) \in C_n[0, b]$, то имеет место оценка

$\|\varepsilon(H_\varepsilon u)(x)\|_{C_n[0,b]} \le \big(N_1 p_0^{-1}\varepsilon + N_2\varepsilon^{1-\beta}\big)\|u(x)\|_{C_n[0,b]} + d_2C_2\sqrt{n}\omega_u\big(\varepsilon^\beta\big),$

где $N_1 = (2 + M_0)\sqrt{n},\ N_2 = 2N_1C_2/(\theta_2^2 d_1 e), d_2 = 1 + \theta_2^{-1}, \theta_2 = 1 - \theta_1, 0 < \theta_1 < 1,$ $\omega_u\big(\varepsilon^\beta\big) = \sup\limits_{|x-t|\le\varepsilon^\beta} \|u(x) - u(t)\|,\ 1/2 \le \beta < 1,\ p_0 = p(0),$

$M_0 = \max\limits_{0\le x\le b}\big|P^{(2)}(x)\big|.$

С помощью резольвенты ядра $\left(-\frac{G(t)}{\varepsilon+p(x)}\right)$ уравнение (3) можно привести к виду

$$u_\varepsilon(x) = -\frac{1}{\varepsilon + p(x)}\int_0^x exp\left(-\int_t^x \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)}ds\right)\frac{G(t)}{\varepsilon + p(t)}\{(Au_\varepsilon)(t) -$$

$$-(Au_\varepsilon)(x)\}dt + \frac{1}{\varepsilon + p(x)} exp\left(-\int_0^x \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)}ds\right)(Au_\varepsilon)(x). \qquad (4)$$

Прибавив справа и слева системы (2) выражение $\varepsilon u(x)$ и приведя к виду (4) рассмотрим разность полученной системы и системы (4). При этом воспользуемся подстановкой

$$\eta_\varepsilon(x) = u_\varepsilon(x) - u(x). \qquad (5)$$

Тогда

$$\eta_\varepsilon(x) = -\frac{1}{\varepsilon + p(x)}\int_0^x exp\left(-\int_t^x \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)}ds\right)\frac{G(t)}{\varepsilon + p(t)}\{(Au_\varepsilon)(t) -$$

$$-(Au_\varepsilon)(x) - (Au)(t) + (Au)(x)\}dt + \frac{1}{\varepsilon + p(x)} exp\left(-\int_0^x \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)}ds\right) \times$$

$$\times \{(Au_\varepsilon)(x) - (Au)(x)\} - \varepsilon(H_\varepsilon u)(x). \qquad (6)$$

Пусть $\Omega_n[0, b] = \{\, u(x) \in C_n[0, b]: \|u(x) - u_0\| \le r_0, 0 < u_0,\ r_0 = const\, \}$. Оценим разность операторов $(Au_\varepsilon)(x) - (Au)(x)$.

$$\Bigg\|\int_0^t \Bigg[K(x,s) - K(t,s) + C_0\int_s^t K(v,s)dv\Bigg]\eta_\varepsilon(s)ds + \int_t^x [K(x,s) -$$

$$-K(s,s)]\eta_\varepsilon(s)ds + \int_t^x C_0\int_s^x K(v,s)dv\, \eta_\varepsilon(s)\, ds \qquad \Bigg\| \le 2(L_k + C_0M) \times$$

$$\times (x - t)b\|\eta_\varepsilon(x)\|_{C_n[0,b]};$$

$$C_0\Bigg\|\int_0^t \int_t^x N\big(v, s, u_\varepsilon(s)\big) - N\big(v, s, u(s)\big)\big]dvds + \int_t^x \int_s^x \big[N\big(v, s, u_\varepsilon(s)\big) -$$

$$-N\big(v, s, u(s)\big)\big]dvds \le 2C_0K_N(x - t)b\|\eta_\varepsilon(x)\|_{C_n[0,b]};$$

$$C_1\left\|\int\limits_0^t\int\limits_t^x K(\nu,s)\,\eta_\varepsilon(\nu)u(s)d\nu ds+\int\limits_t^x\int\limits_s^x K(\nu,s)\,\eta_\varepsilon(\nu)u(s)d\nu ds\right\}dt\right\|\le$$

$$\le 2C_1Mrb(x-t)\ \|\eta_\varepsilon(x)\|_{\mathrm{C}_n[0,b]};$$

$$\left\|\int\limits_0^t\int\limits_t^x \eta_\varepsilon(\nu)N\big(\nu,s,u_\varepsilon(s)\big)d\nu ds\,dt\right\|\le M_Nb\|\eta_\varepsilon(x)\|_{\mathrm{C}_n[0,b]},$$

$M_N=\max\limits_{D\times R^1}\|N(x,t,u)\|, M=\max\limits_{D}\|K(x,t)\|, L_K=Lip(K(x,t)|x)$,

$K_N=\max\limits_{D\times R^1}\big\|N_u\big(x,t,u(t)\big)\big\|, r=r_0+u_0.$

Продолжая данные оценки получим:

$$\|(Au_\varepsilon)(x)-(Au)(x)\|\le Q_1b\|u_\varepsilon(x)-u(x)\|_{\mathrm{C}_n[0,b]},$$

$$\|(Au_\varepsilon)(t)-(Au_\varepsilon)(x)+(\,Au)(x)-(Au)(t)\|\le Q_2(x-t)b\times$$
$$\times\|u_\varepsilon(x)-u(x)\|_{\mathrm{C}_n[0,b]},\qquad(7)$$

где $Q_1=Q_0+K_N\ \ Q_2=Q_0+K_N+L_N,\ L_N=Lip(N_u(x,t,u)|x),$ $Q_0=L_k+C_0(K_N+M)+\ C_1(rK_N+M_N).$

Так как для матричной функции $exp\left(-\int_t^x\frac{G(t)}{\varepsilon+p(t)}dt\right)$ выполняется неравенство Важевского [1, стр. 149].

$$\left\|exp\left(-\int\limits_t^x\frac{G(s)}{\varepsilon+p(s)}ds\right)\right\|\le\sqrt{n}\,exp\left(-\int\limits_t^x\frac{\lambda(s)}{\varepsilon+p(s)}ds\right)$$

то из (6) в силу (7) и условия *г)* получим

$$\|\eta_\varepsilon(x)\|\le\left\{\frac{C_2\sqrt{n}}{\varepsilon+p(x)}\int\limits_0^x exp\left(-\int\limits_t^x\frac{\lambda(s)}{\varepsilon+p(s)}ds\right)\frac{\lambda(t)}{\varepsilon+p(t)}Q_2b\times\right.$$
$$\left.\times(x-t)dt+exp\left(-\int\limits_0^x\frac{\lambda(s)}{\varepsilon+p(s)}ds\right)\frac{\sqrt{n}}{\varepsilon+p(x)}\ Q_1b\right\}\|\eta_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]}+$$
$$+\|\varepsilon(H_\varepsilon u)(x)\|\le\left\{\frac{C_2\sqrt{n}Q_2b}{d_1\theta_2^2}\int\limits_0^x exp\left(-\int\limits_t^x\frac{\theta_2\lambda(s)}{\varepsilon+p(s)}ds\right)\times\right.$$
$$\times\left(\int\limits_t^x\frac{\theta_2\lambda(s)}{\varepsilon+p(s)}ds\right)d_t\left(-\int\limits_t^x\frac{\theta_2\lambda(s)}{\varepsilon+p(s)}ds\right)+exp\left(-\int\limits_0^x\frac{\theta_2\lambda(s)}{\varepsilon+p(s)}ds\right)(\,Q_1b\times$$
$$\left.\times\frac{\sqrt{n}}{\varepsilon+p(0)}\right\}\|\eta_\varepsilon(x)\|_{C[0,b]}+\|\varepsilon(H_\varepsilon u)(x)\|.$$

Отсюда, переходя к норме, приходим к оценке

$$\|\eta_\varepsilon(x)\|_{\mathrm{C}_n[0,b]}\le q\|\eta_\varepsilon(x)\|_{\mathrm{C}_n[0,b]}+\|\varepsilon(H_\varepsilon u)(x)\|_{C[0,b]},$$

где $q=(q_1+q_2)b,\ q_2=C_2\theta_2^{-2}d_1^{-1}\sqrt{n}Q_2,\ q_1=p^{-1}(0)\sqrt{n}Q_1.$

Если $q<1$, то

$$\|\eta_\varepsilon(x)\|_{\mathrm{C}_n[0,b]}\le(1-q)^{-1}\|\varepsilon(H_\varepsilon u)(x)\|_{C[0,b]}.$$

Следовательно, при $\varepsilon\to0,$ в силу оценки леммы и подстановки (5) функции $u_\varepsilon(x)$ - решение системы (3) равномерно сходится к $u(x)$ - решению системы (2). Несложно показать [2, с.23] эквивалентность системы (2) и системы (1). Таким образом, доказана теорема.

Теорема. Пусть выполняются условия *а*) - *г*), $q<1$ и система (1) имеет решение $u(x)\in\Omega_n[0,b]$. Тогда при $\varepsilon\to0$ решение системы (3) равномерно сходится к решению системы (1), причем

$$\|u_\varepsilon(x)-u(x)\|_{\mathrm{C}_n[0,b]}\le(1-q)^{-1}\|\varepsilon(H_\varepsilon u)(x)\|_{\mathrm{C}_n[0,b]}.$$

Следствие. При выполнении условий теоремы решение системы (1) единственно в $\Omega_n[0,b]$.

Литература

1. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. – Москва: Наука, 1967. – 472 с.
2. *Омуров Т.Д., Каракеев Т.Т.* Регуляризация и численные методы решения обратных и нелокальных краевых задач. – Бишкек: Илим, 2006. – 164 с.
3. Об одном методе регуляризации системы линейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода// Вестник ЕНУ им. Л.Н.Гумилева.- Астана, 2014.- С.51-56.