Метод квадратурных формул для нелинейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода

Каракеев Т. Т.[1], Рустамова Д.[2]

[1]*Каракеев Таалайбек Тултемирович / Karakeev Taalaibek Tultemirovich – доктор физико-математических наук, профессор,*
кафедра информационных технологий и программирования;
[2]*Рустамова Динара / Rustamova Dinara – старший преподаватель,*
кафедра информатики и вычислительной техники,
Кыргызский национальный университет им. Ж. Баласагына, г. Бишкек, Кыргызская Республика

Аннотация: *в работе рассматривается метод конечных сумм для нелинейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода. Аппроксимация проводится на основе регуляризованного уравнения с помощью квадратурной формулы правых прямоугольников. Доказана сходимость численного решения к точному решению, получена оценка погрешности метода.*

Abstract: *in work the method of the final sums for the nonlinear integrated equations of Voltaire of the third kind is considered. Approximation is carried out on the basis of the regularizing equation by means of a quadrature formula of the right rectangles. Convergence of the numerical solution to the exact solution is proved, the method error assessment is received.*

Ключевые слова: *уравнение Вольтерра, аппроксимация, квадратурная формула, малый параметр.*
Keywords: *Volterra equations, approximation, quadrature formula, small parameter.*

Рассмотрим нелинейное интегральное уравнение Вольтерра третьего рода

$$p(x)\varphi(x)+\int_0^x K(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi=\int_0^x N(x,\xi,\varphi(\xi))d\xi=g(x), \tag{1}$$

где известные функции $p(x),\ K(x,\xi),\ g(x),\ N(x,\xi,\varphi)$ удовлетворяют условиям:

а) $p(x),\ g(x)\in C[0,b],\ K(x,\xi)\in C(D),\ D=\{(x,\xi)/\ 0\le\xi\le x, 0\le x\le b\}$;

б) $p(x)$ - неубывающая функция, $p(x)>0\,\forall x\in(0,b],\ \ p(0)=g(0)=0,$

$K(x,x)\ge 0,\ C_0 p(x)+K(x,x)\ge d_1>0,\ 0\le x\le b$;

в) $N(x,\xi,\varphi)\in C^{1,1,2}(D\times R^1),\ N(x,x,\varphi)=0,\ N_x(x,\xi,0)=0$.

Пусть $\boldsymbol{J}$ – оператор Вольтерра $(\boldsymbol{Jv})(\boldsymbol{x})=\int_0^x \boldsymbol{v}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{dt}$, $\boldsymbol{I}$ - единичный оператор. Уравнение (4), действуя оператором $\boldsymbol{I}+\boldsymbol{C_0 J}$, преобразуем к эквивалентному уравнению [2]

$$p(x)\varphi(x)+\int_0^x G(\xi)\varphi(\xi)d\xi=\int_0^x[K(\xi,\xi)-K(x,\xi)]\varphi(\xi)d\xi-C_0\int_0^x\int_\xi^x K(\tau,\xi)\varphi(\xi)d\tau d\xi-$$

$$+\int_0^x N(x,\xi,\varphi(\xi))d\xi+C_0\int_0^x\int_\xi^x N(\tau,\xi,\varphi(\xi))d\tau d\xi+\mu(x)\ , \tag{2}$$

где $G(\xi)=C_0 p(\xi)+K(\xi,\xi),\ \ \mu(x)=g(x)+C_0\int_0^x g(\xi)d\xi.$

Рассмотрим уравнение с малым параметром $\boldsymbol{\varepsilon}$ из интервала (0,1)

$$(\varepsilon+p(x))\varphi_\varepsilon(x)+\int_0^x G(\xi)\varphi_\varepsilon(\xi)d\xi=\int_0^x[K(\xi,\xi)-K(x,\xi)]\varphi_\varepsilon(\xi)d\xi+\int_0^x N(x,\xi,\varphi_\varepsilon(\xi))d\xi-$$

$$-C_0\int_0^x\int_\xi^x K(\tau,\xi)\varphi_\varepsilon(\xi)d\tau d\xi+C_0\int_0^x\int_\xi^x N(\tau,\xi,\varphi_\varepsilon(\xi))d\tau d\xi+\varepsilon\varphi(0)+\mu(x). \tag{3}$$

Перепишем уравнение (3), используя резольвенту ядра $(-G(\xi)/(\varepsilon+p(x)))$, в следующем виде

$$\varphi_\varepsilon(x)=-\frac{1}{\varepsilon+p(x)}\int_0^x \exp\left(-\int_\xi^x\frac{G(\nu)}{\varepsilon+p(\nu)}d\nu\right)\frac{G(\xi)}{\varepsilon+p(\xi)}\left\{\int_0^\xi[K(\nu,\nu)-K(\xi,\nu)]\varphi_\varepsilon(\nu)d\nu-\right.$$

$$-\int_0^x[K(\nu,\nu)-K(x,\nu)]\varphi_\varepsilon(\nu)d\nu+C_0\int_0^x\int_\nu^x K(\tau,\nu)\varphi_\varepsilon(\nu)d\tau d\nu-C_0\int_0^\xi\int_\nu^\xi K(\tau,\nu)\varphi_\varepsilon(\nu)d\tau d\nu+$$

$$+\int_0^\xi N(\xi,\nu,\varphi_\varepsilon(\nu))d\nu-\int_0^x N(x,\nu,\varphi_\varepsilon(\nu))d\nu+C_0\int_0^\xi\int_\nu^\xi N(\tau,\nu,\varphi_\varepsilon(\nu))d\tau d\nu-$$

$$\left.-C_0\int_0^x\int_\nu^x N(\tau,\nu,\varphi_\varepsilon(\nu))d\tau d\nu+\mu(\xi)-\mu(x)\right\}d\xi+\frac{1}{\varepsilon+p(x)}\exp\left(-\int_0^x\frac{G(\nu)}{\varepsilon+p(\nu)}d\nu\right)\times$$

$$\times\left\{\int_0^x[K(\nu,\nu)-K(x,\nu)]\varphi_\varepsilon(\nu)d\nu-C_0\int_0^x\int_\nu^x K(\tau,\nu)\varphi_\varepsilon(\nu)d\tau d\nu+\int_0^x N(x,\nu,\varphi_\varepsilon(\nu))d\nu+\right.$$

$$\left.+C_0\int_0^x\int_\nu^x N(\tau,\nu,\varphi_\varepsilon(\nu))d\tau d\nu+\mu(x)+\varepsilon\varphi(0)\right\} \qquad (4)$$

Уравнение (4) имеет единственное непрерывное решение [2], которое равномерно сходится к точному решению уравнения (2).

Пусть n - натуральное число, $\boldsymbol{\omega_h=\{x_i=ih, i=0..n, b=nh\}}$ и $\boldsymbol{C_h}-$ пространство сеточных функций $\boldsymbol{\varphi_i=\varphi(x_i)}$ с нормой

$$\|\boldsymbol{\varphi_i}\|_{C_h}=\max_{0\le i\le n}|\boldsymbol{\varphi_i}|.$$

Полагая $x=x_i, i=1..n$ аппроксимируем интегралы в (4) квадратурной формулой правых прямоугольников [4, с. 164]. Тогда получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\varphi_{\varepsilon,i}=-\frac{1}{\varepsilon+p_i}h\sum_{j=1}^{i}\exp\left(-h\sum_{m=j+1}^{i}\frac{G_m}{\varepsilon+p_m}\right)\frac{G_j}{\varepsilon+p_j}\left[h\sum_{m=1}^{j-1}(K_{m,m}-K_{j,m})\varphi_{\varepsilon,m}-C_0h\sum_{m=1}^{j-1}h\sum_{s=m+1}^{j}K_{s,m}\varphi_{\varepsilon,m}-\right.$$

$$-h\sum_{m=1}^{i-1}(K_{m,m}-K_{i,m})\varphi_{\varepsilon,m}-C_0h\sum_{m=1}^{i-1}h\sum_{s=m+1}^{i}K_{s,m}\varphi_{\varepsilon,i}+h\sum_{m=1}^{j-1}[N(x_i,x_m,\varphi_{\varepsilon,m})-h\sum_{m=1}^{i-1}N(x_i,x_m,\varphi_{\varepsilon,m})+$$

$$\left.+C_0h\sum_{m=1}^{j-1}h\sum_{s=j+1}^{j}N(x_s,x_m,\varphi_{\varepsilon,m})-C_0h\sum_{m=1}^{i-1}h\sum_{s=m+1}^{i}N(x_s,x_m,\varphi_{\varepsilon,m})+\mu_j-\mu_i\right]+\frac{1}{\varepsilon+p_i}\exp\left(-h\sum_{j=1}^{i}\frac{G_j}{\varepsilon+p_j}\right)\times$$

$$\times\left[h\sum_{j=1}^{i-1}(K_{j,j}-K_{i,j})\varphi_{\varepsilon,j}-C_0h\sum_{j=1}^{i-1}h\sum_{s=j+1}^{i}K_{s,j}\varphi_{\varepsilon,j}+C_0h\sum_{j=1}^{i-1}h\sum_{s=j+1}^{i}N(x_s,x_j,\varphi_{\varepsilon,j})+\mu_i+\varepsilon\varphi_{h,0}+\right.$$

$$\left.+h\sum_{j=1}^{i-1}N(x_i,x_j,\varphi_{\varepsilon,j})\right], i=1..n. \qquad (5)$$

Выберем величину $\varphi_{0,h}$ в виде $\varphi_{0,h}=g_1/(p_1+hG_1)$, для которой из условия *а)- в)* следуют оценки

$$\left|\varphi_{0,h}\right|\le N_1/d_1,\ \left|\varphi_{0,h}-\varphi(0)\right|\le N_2h,\ N_1=\max_{x\in[0,b]}\left|g'(x)\right|,\ 0<N_2=const.$$

Имеет место следующая лемма [3].

Лемма. Пусть выполняются условия *а)-в)* и $\varphi(x)\in C^1[0,b]$. Тогда справедлива оценка

$$\left\|H_\varepsilon^h[\varphi_i]\right\|_{C_h}\le N_3,\ 0<N_3=const,$$

где действие оператора H_ε^h на сеточную функцию $w_0, w_1, \ldots, w_n$ определяется по формуле

$$H_\varepsilon^h[w_i] = -\frac{1}{\varepsilon + p_i} h\sum_{j=1}^{i} \exp\left(-h\sum_{m=j}^{i}\frac{G_m}{\varepsilon + p_m}\right)\frac{G_j}{\varepsilon + p_j}[w_j - w_i] + \frac{1}{\varepsilon + p_i}\exp\left(-h\sum_{m=1}^{i}\frac{G_m}{\varepsilon + p_m}\right)[w_i - w_0].$$

Теорема. Пусть выполняются условия *а)-в)* и $\varepsilon = O(h^\alpha)$ для всех $0 < \alpha \le 1/2$. Тогда решение системы (5) при $h \to 0$ равномерно сходится к φ_i - точному решению уравнения (4), причем имеет место оценка

$$\left\|\varphi_{\varepsilon,i} - \varphi_i\right\|_{C_h} \le N_4 h^\alpha,\ 0 < N_4 = const.$$

Доказательство. Из уравнения (2) получим

$$(\varepsilon + p(x))\varphi(x) + \int_0^x G(\xi)\varphi(\xi)d\xi = \int_0^x [K(\xi,\xi) - K(x,\xi)]\varphi(\xi)d\xi - C_0\int_0^x\int_\xi^x K(\tau,\xi)\varphi(\xi)d\tau d\xi +$$

$$+\int_0^x N(x,\xi,\varphi(\xi))d\xi + C_0\int_0^x\int_\xi^x N(\tau,\xi,\varphi(\xi))d\tau d\xi + \mu(x) + \varepsilon\varphi(x).$$

Приведя это уравнение к виду (4), полагая *x=x*$x = x_i$, $i = 1..n$ применим формулу правых прямоугольников для интегралов. Тогда

$$\varphi_i = -\frac{1}{\varepsilon + p_i} h\sum_{j=1}^{i}\exp\left(-h\sum_{m=j+1}^{i}\frac{G_m}{\varepsilon + p_m}\right)\frac{G_j}{\varepsilon + p_j}\left[h\sum_{m=1}^{j-1}(K_{m,m} - K_{j,m})\varphi_m - C_0 h\sum_{m=1}^{j-1} h\sum_{s=m+1}^{j-1} K_{s,m}\varphi_m -\right.$$

$$-h\sum_{m=1}^{i-1}(K_{m,m} - K_{i,m})\varphi_m + C_0 h\sum_{m=1}^{i-1} h\sum_{s=m+1}^{i-1} K_{s,m}\varphi_i + h\sum_{m=1}^{j-1} N(x_j, x_m, \varphi_m) - h\sum_{m=j+1}^{i-1} N(x_i, x_m, \varphi_m) +$$

$$\left. + C_0 h\sum_{m=1}^{j-1} h\sum_{s=m+1}^{j} N(x_s, x_m, \varphi_m) - C_0 h\sum_{m=1}^{i-1} h\sum_{s=m+1}^{i} N(x_s, x_m, \varphi_m) + \mu_j - \mu_i + \varepsilon(\varphi_j - \varphi_i)\right] +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon + p_i}\exp\left(-h\sum_{j=1}^{i}\frac{G_j}{\varepsilon + p_j}\right)\left[h\sum_{j=1}^{i-1}(K_{j,j} - K_{i,j})\varphi_j - C_0 h\sum_{j=1}^{i-1} h\sum_{s=j+1}^{i} K_{s,j}\varphi_j + h\sum_{j=1}^{i-1} N(x_i, x_j, \varphi_j) +\right.$$

$$\left. + C_0 h\sum_{j=1}^{i-1} h\sum_{s=j+1}^{i} N(x_s, x_j, \varphi_j) + \mu_i + \varepsilon\varphi_i\right] + \chi_i,\ i = 1..n, \tag{6}$$

где χ_i – сумма всех остаточных членов интегралов, для которой справедлива оценка [3]

$$|\chi_i| \le M_1\frac{h}{\varepsilon} + M_2 h,\ 0 < M_1, M_2 = const. \tag{7}$$

Введем вектор погрешности $\eta_{\varepsilon,i}^h = \varphi_{\varepsilon,i} - \varphi_i$, $i = 1..n$. Тогда из (5) и (6) получим

$$\eta_{\varepsilon,i} = -\frac{1}{\varepsilon + p_i} h\sum_{j=1}^{i}\exp\left(-h\sum_{m=j+1}^{i}\frac{G_m}{\varepsilon + p_m}\right)\frac{G_j}{\varepsilon + p_j}\left[h\sum_{m=1}^{j-1}(K_{m,m} - K_{j,m})\eta_{\varepsilon,m} - C_0 h\sum_{m=1}^{j-1} h\sum_{s=m+1}^{j} K_{s,m}\eta_{\varepsilon,m} -\right.$$

$$-h\sum_{m=1}^{i-1}(K_{m,m} - K_{i,m})\eta_{\varepsilon,m} + C_0 h\sum_{m=1}^{i-1} h\sum_{s=m+1}^{i} K_{s,m}\eta_{\varepsilon,m} + h\sum_{m=1}^{j-1}[N(x_j, x_m, \varphi_{\varepsilon,m}) - N(x_j, x_m, \varphi_m)] -$$

$$-h\sum_{m=1}^{i-1}[N(x_i, x_m, \varphi_{\varepsilon,m}) - N(x_i, x_m, \varphi_m)] + C_0 h\sum_{m=1}^{j-1} h\sum_{m=j+1}^{j}[N(x_s, x_m, \varphi_{\varepsilon,m}) - N(x_s, x_m, \varphi_m)] -$$

$$-C_0 h\sum_{m=j+1}^{i-1} h\sum_{s=m+1}^{i}[N(x_s,x_m,\varphi_{\varepsilon,m})-N(x_s,x_m,\varphi_m)]+\varepsilon(\varphi_j-\varphi_i)\Bigg]+\frac{1}{\varepsilon+p_i}\exp\left(-h\sum_{j=1}^{i}\frac{G_j}{\varepsilon+p_j}\right)\times$$

$$\times\Bigg[h\sum_{j=1}^{i-1}(K_{j,j}-K_{i,j})\eta_{\varepsilon,j}-C_0 h\sum_{j=1}^{i-1}h\sum_{s=j+1}^{i}K_{s,j}\eta_{\varepsilon,j}+h\sum_{j=1}^{i-1}[N(x_i,x_j,\varphi_{\varepsilon,j})-N(x_i,x_j,\varphi_j)]+$$

$$+C_0 h\sum_{j=1}^{i-1}h\sum_{s=j+1}^{i}[N(x_s,x_j,\varphi_{\varepsilon,j})-N(x_s,x_j,\varphi_j)]-\varepsilon(\varphi_i-\varphi_{h,0})\Bigg]+\chi_i,\quad i=1..n. \tag{8}$$

В силу условия *а)* и *б*) получим

$$\left|h\sum_{m=1}^{j-1}L_{j,m}\varphi_{\varepsilon,m}-h\sum_{m=1}^{i-1}L_{i,m}\varphi_{\varepsilon,m}\right|\le h\sum_{m=1}^{j-1}|L_{j,m}-L_{i,m}||\varphi_{\varepsilon,m}|+h\sum_{m=j}^{i-1}|L_{i,m}||\varphi_{\varepsilon,m}|\le(T_1+C_0T_0)\times$$

$$\times(hi-hj)h\sum_{m=1}^{j-1}|\varphi_{\varepsilon,m}|+(T_1+C_0T_0)h\sum_{m=j}^{i-1}(hi-hm)|\varphi_{\varepsilon,m}|\le 2(T_1+C_0T_0)(hi-hj)h\sum_{m=1}^{i-1}|\varphi_{\varepsilon,m}|.$$

где $T_0=\max\limits_{D}|K(x,\xi)|$, $T_1=\max\limits_{D}|K'_x(x,\xi)|$;

$$\frac{hi-hj}{\varepsilon+p_i}\le h\sum_{m=j+1}^{i}\frac{1}{\varepsilon+p_m}\le d_1^{-1}h\sum_{m=j+1}^{i}\frac{G_m}{\varepsilon+p_m};$$

$$\left|-\frac{1}{\varepsilon+p_i}h\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{\varepsilon+p_j}\exp\left(-h\sum_{m=j+1}^{i}\frac{G_m}{\varepsilon+p_m}\right)G_j\left[h\sum_{m=1}^{j-1}L_{j,m}\varphi_{\varepsilon,m}-h\sum_{m=1}^{i-1}L_{i,m}\varphi_{\varepsilon,m}\right]\right|\le$$

$$\le\sum_{j=1}^{i}\exp\left(-h\sum_{m=j+1}^{i}\frac{G_m}{\varepsilon+p_m}\right)\frac{(hi-hj)}{\varepsilon+p_i}\frac{h}{\varepsilon+p_j}\left[2(T_1+C_0T_0)h\sum_{m=1}^{i-1}|\varphi_{\varepsilon,m}|\right]T_2\le 2T_3T_2(T_1+C_0T_0)\times$$

$$\times d_1^{-1}h\sum_{m=1}^{i-1}|\varphi_{\varepsilon,m}|,\ T_3=Sup\sum_{j=1}^{i}\exp\left(-h\sum_{m=j+1}^{i}\frac{G_m}{\varepsilon+p_m}\right)\left(h\sum_{m=j+1}^{i}\frac{G_m}{\varepsilon+p_m}\right),\ T_2=\max_{[0,b]}|G(x)|.$$

Проведя аналогичные оценки из (8) получим

$$|\eta_{\varepsilon,i}|\le T_4 h\sum_{m=1}^{i}|\eta_\varepsilon^h(x)|+\varepsilon|H_\varepsilon^h[\varphi_i]|+|\chi_i|,\ 0<T_4=const.$$

Применим здесь разностный аналог леммы Гроноулла-Беллмана [1, с. 20].

$$|\eta_{\varepsilon,i}^h|\le(\varepsilon|H_\varepsilon^h[\varphi_i]|+|\chi_i|)\exp(N_4 b)$$

Тогда, в силу леммы и оценки (7), учитывая связь $\varepsilon=O(h^\alpha)$, $0<\alpha\le 1/2$, переходя к сеточной норме, приходим к оценке теоремы. Теорема доказана.

Расчеты показывает, что при $p(x)=x^3, K(x,t)=1+t^2, N(x,t,\varphi)=0$, $g(x)=6x^5/5-x^3-x$ метод (5) допускает ошибку $\delta=0.107,$ если $h=0.01,$ а при шаге $h=0.005,\ \delta=0.088$.

Литература

1. *Апарцин А. С.* Неклассические уравнения Вольтерра I рода: теория и численные методы. – Новосибирск: Наука. Сибирская издательская фирма РАН. – 1999. – 193 с.
2. *Каракеев Т. Т., Рустамова Д.* Регуляризация нелинейного интегрального уравнения Вольтерра третьего рода // Вестник КНУ. - Бишкек, 2011. - Вып. 1. - С. 76-79.
3. *Каракеев Т. Т., Рустамова Д.* Регуляризация и метод квадратур для линейных интегральных уравнений

Вольтерра третьего рода // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2009. - Вып. 40. - С127-132.
4. *Самарский А. А., Гулин А. В*. Численные методы. – Москва: Наука, 1989. – 432 с.