Линейное интегральное уравнение Вольтерра-Стилтьеса первого рода с двумя независимыми переменными

Байгесеков А. М.

Байгесеков Абдибаит Мажитович / Baigazakov Abdybai Mazhitovich - старший преподаватель,
кафедра высшей математики,
Сулюктинский гуманитарно-экономический институт,
Баткенский государственный университет, Кыргызская Республика

***Аннотация**: в данной работе для линейных интегральных уравнений Вольтерра-Стилтьеса первого рода с двумя независимыми переменными построены регуляризирующие операторы по М.М. Лаврентьеву и доказана теорема единственности в фс*

***Abstract:** in this paper, for linear integral equations of Volterra-Stieltjes of the first kind with two independent variables is constructed regularizing operators by M. M. Lavrentyev and proved the uniqueness theorem in* $C(G)$.

***Ключевые слова:** единственность, регуляризация, линейные интегральные уравнения Вольтерра-Стилтьеса с двумя независимыми переменными первого рода.*

***Keywords:** singularity, regularization of the integral equations, linear Volterra-Stieltjes integral with two independent variables of the first kind.*

УДК 517. 968

Рассмотрим уравнение

$$\int_{t_0}^{t} K(t,x,s)u(s,x)d\varphi(s) + \int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x} N(t,x,s,y)u(s,y)d\psi(y)d\varphi(s) = f(t,x), \qquad (t,x)\in G, \quad (1)$$

где $u(t,x)$ - искомая, $K(t,x,s), N(t,x,s,y)$-ядра, $f(t,x)$- известная функция;

$f(t_0,x)=0$ при $x\in[x_0,X]$; $G=\{(t,x): t_0\le t\le T, x_0\le x\le X\}$, $\varphi(t),\psi(x)$ - известные строго возрастающие непрерывные функции.

Вопросы регуляризация, единственности и существования решений интегральных уравнений Вольтерра с двумя независимыми переменными исследованы в [1,2]. В работе [3] исследованы интегральные уравнения Вольтерра в шкалах банаховых пространств. Различные вопросы для систем интегральных уравнений Вольтерра первого рода рассматривались в [4,5]. В [6,7] исследованы вопросы регуляризации решений интегральных уравнений первого рода. В данной работе построены регуляризирующие операторы по М.М. Лаврентьеву и доказана теорема единственности решения уравнения (1) в классе $C(G)$.

Отметим, что множество $C(G)$ всех непрерывных действительных функций, определенных на G, с нормой $\|u\|_C = \max_G |u|$ образует нормированное пространство.

Пусть выполняются следующие условия:

а) При любом фиксированном $(t,x)\in G$ функция $K(t,x,s)\in L_1([t_0,t])$, а функция $N(t,x,s,y)\in L_1([t_0,t]\times[x_0,x])$, функции $K(t,x,s)$ и $N(t,x,s,y)$ - непрерывные по совокупности (t,x) соответственно в областях $G_1=\{(t,x,s): t_0\le s\le t\le T, x_0\le x\le X\}$ и $G_3=\{(t,x,s,y): t_0\le s\le t\le T, x_0\le y\le x\le X\}$,

$K(t,x,t)\in L_1(G)$, $K(t,x,t)\ge 0$ при $(t,x)\in G$.

б) При $t>\tau$ для любых (t,x,s) и $(\tau,x,s)\in G_1$ справедливо

$|K(t,x,s)-K(\tau,x,s)|\le C\int_{\tau}^{t} K(s,x,s)d\varphi(s)$, где $0<C$ - некоторая постоянная. в) При $t>\tau$ для любых (t,x,s,y) и $(\tau,x,s,y)\in G_3$ справедливо

$$\left|N(t,x,s,y)-N(\tau,x,s,y)\right|\le C_1 l_1 l_2\int_{\tau}^{t}K(s,x,s)d\varphi(s),$$

$N(t,x,t,y)\equiv 0$ при $(t,x,y)\in G_2=\{(t,x,y):t_0\le t\le T, x_0\le y\le x\le X\}$

где $0\le l_1$, $0\le l_2$ - постоянные.

Наряду с уравнением (1) будем рассматривать следующее сингулярно-возмущенное уравнение

$$\varepsilon v(t,x,\varepsilon)+\int_{t_0}^{t}K(t,x,s)v(s,x,\varepsilon)d\varphi(s)+\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}N(t,x,s,y)v(s,y,\varepsilon)d\psi(y)d\varphi(s)=f(t,x), \qquad (2)$$

где $0<\varepsilon$ - малый параметр, $(t,x)\in G$.

Решение уравнения (2) будем искать в виде

$$v(t,x,\varepsilon)=u(t,x)+\xi(t,x,\varepsilon), \qquad (3)$$

где $u(t,x)$ - решение уравнения (1).

Подставляя функцию $v(t,x,\varepsilon)$ в (2) и учитывая, что $u(t,x)$ - решение уравнения (1), имеем:

$$\varepsilon\xi(t,x,\varepsilon)+\int_{t_0}^{t}K(t,x,s)\xi(s,x,\varepsilon)d\varphi(s)+\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}N(t,x,s,y)\xi(s,y,\varepsilon)d\psi(y)d\varphi(s)+\varepsilon u(t,x)=0.$$

Последнее, разделив на ε и преобразовав, получим:

$$\xi(t,x,\varepsilon)+\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}K(s,x,s)\xi(s,x,\varepsilon)d\varphi(s)=-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}[K(t,x,s)-K(s,x,s)]\xi(s,x,\varepsilon)d\varphi(s)-$$

$$-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}N(t,x,s,y)\xi(s,y,\varepsilon)d\psi(y)d\varphi(s)-u(t,x). \qquad (4)$$

Теперь применим резольвенту ядра $\left[-\frac{K(s,x,s)}{\varepsilon}\right]$:

$$R(t,x,s,\varepsilon)=-\frac{K(s,x,s)}{\varepsilon}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{s}^{t}K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau)}$$

Тогда последнее уравнение имеет, вид

$$\xi(t,x,\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}[K(t,x,s)-K(s,x,s)]\xi(s,x,\varepsilon)d\varphi(s)-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}N(t,x,s,y)\xi(s,y,\varepsilon)d\psi(y)d\varphi(s)-$$

$$-u(t,x)+\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{t_0}^{t}K(s,x,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{s}^{t}K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau)}\left\{\int_{t_0}^{s}[K(s,x,\tau)-K(\tau,x,\tau)]\xi(\tau,x,\varepsilon)d\varphi(\tau)+\right.$$

$$\left.+\int_{t_0}^{s}\int_{x_0}^{x}N(s,x,\tau,y)\xi(\tau,y,\varepsilon)d\psi(y)d\varphi(\tau)+\varepsilon u(s,x)\right\}d\varphi(s).$$

Относительно этого уравнения делаем следующие преобразования:

$$\xi(t,x,\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}[K(t,x,s)-K(s,x,s)]\xi(s,x,\varepsilon)d\varphi(s)-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}N(t,x,s,y)\xi(s,y,\varepsilon)d\psi(y)d\varphi(s)-$$

$$-u(t,x)+\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}K(s,x,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{s}^{t}K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau)}[K(t,x,\tau)-K(\tau,x,\tau)]\xi(\tau,x,\varepsilon)d\varphi(\tau)d\varphi(s)-$$

$$-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}K(s,x,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau)}\left[K(t,x,\tau)-K(s,x,\tau)\right]\xi(\tau,x,\varepsilon)d\varphi(\tau)d\varphi(s)+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\int_{x_0}^{x}K(s,x,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau)}N(t,x,\tau,y)\xi(\tau,y,\varepsilon)d\psi(y)d\varphi(\tau)d\varphi(s)-$$

$$-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\int_{x_0}^{x}K(s,x,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau)}\left[N(t,x,\tau,y)-N(s,x,\tau,y)\right]\xi(\tau,y,\varepsilon)d\psi(y)d\varphi(\tau)d\varphi(s)+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}K(s,x,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau)}u(t,x)d\varphi(s)-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}K(s,x,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau)}\left[u(t,x)-u(s,x)\right]d\varphi(s).$$

Так как $\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}K(s,x,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau)}d\varphi(s)=1-e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^t K(s,x,s)d\varphi(s)}$, то из последнего уравнения, получим:

$$\xi(t,x,\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\left[K(t,x,s)-K(s,x,s)\right]\xi(s,x,\varepsilon)d\varphi(s)-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}N(t,x,s,y)\xi(s,y,\varepsilon)d\psi(y)d\varphi(s)+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}K(s,x,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau)}\left[K(t,x,\tau)-K(\tau,x,\tau)\right]\xi(\tau,x,\varepsilon)d\varphi(\tau)d\varphi(s)-$$

$$-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}K(s,x,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau)}\left[K(t,x,\tau)-K(s,x,\tau)\right]\xi(\tau,x,\varepsilon)d\varphi(\tau)d\varphi(s)+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\int_{x_0}^{x}K(s,x,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau)}N(t,x,\tau,y)\xi(\tau,y,\varepsilon)d\psi(y)d\varphi(\tau)d\varphi(s)-$$

$$-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\int_{x_0}^{x}K(s,x,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau)}\left[N(t,x,\tau,y)-N(s,x,\tau,y)\right]\xi(\tau,y,\varepsilon)d\psi(y)d\varphi(\tau)d\varphi(s)-$$

$$-u(t,x)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^t K(s,x,s)d\varphi(s)}-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}K(s,x,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau)}\left[u(t,x)-u(s,x)\right]d\varphi(s).$$

Сюда применяя формулу Дирихле, затем заменив τ на s получим

$$\xi(t,x,\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau)}\left[K(t,x,s)-K(s,x,s)\right]\xi(s,x,\varepsilon)d\varphi(s)-$$

$$-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{t_0}^{t}\left\{\int_{s}^{t}K(\tau,x,\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau)}\left[K(t,x,s)-K(\tau,x,s)\right]d\varphi(\tau)\right\}\xi(s,x,\varepsilon)d\varphi(s)-$$

$$-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x} N(t,x,s,y)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau)}\xi(s,y,\varepsilon)d\psi(y)d\varphi(s)-$$

$$-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}\left\{\int_s^t K(\tau,x,\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau)}[N(t,x,s,y)-N(\tau,x,s,y)]d\varphi(\tau)\right\}\xi(s,y,\varepsilon)d\psi(y)d\varphi(s)-$$

$$-u(t,x)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^t K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau)}-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t} K(s,x,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau)}[u(t,x)-u(s,x)]d\varphi(s).$$

Отсюда

$$\xi(t,x,\varepsilon)=\int_{t_0}^{t} H(t,x,s,\varepsilon)\xi(s,x,\varepsilon)d\varphi(s)+\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x} N_1(t,x,s,y,\varepsilon)\xi(s,y,\varepsilon)d\psi(y)d\varphi(s)+\phi(t,x,\varepsilon)\ , \quad (5)$$

где

$$H(t,x,s,\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}[K(t,x,s)-K(s,x,s)]e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau)}-$$

$$-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_s^t K(\tau,x,\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau)}[K(t,x,s)-K(\tau,x,s)]d\varphi(\tau), \qquad (6)$$

$$N_1(t,x,s,y,\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}N(t,x,s,y)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau)}-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_s^t K(\tau,x,\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau)}\times$$

$$\times[N(t,x,s,y)-N(\tau,x,s,y)]d\varphi(\tau)\ , \qquad (7)$$

$$\phi(t,x,\varepsilon)=-u(t,x)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^t K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau)}-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t} K(s,x,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau)}[u(t,x)-u(s,x)]d\varphi(s). \qquad (8)$$

Предварительно докажем следующие предложения.

ЛЕММА 1. Пусть

$$\psi(t,x,\varepsilon)=-u(t,x)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^t K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau)}-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t} K(s,x,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau)}[u(t,x)-u(s,x)]d\varphi(s),$$

где $u(t,x)\in C(G),\ u(t_0,x)=0$ при $x\in[x_0,X],\ K(t,x,t)\in L_1(G),\ K(t,x,t)>0$ при почти всех $(t,x)\in G$, функция $\phi(t,x)=\int_{t_0}^{t} K(s,x,s)d\varphi(s)$ непрерывна по совокупности $(t,x)\in G$. Тогда

справедлива оценка

$$\|\psi(t,x,\varepsilon)\|_C\le 3\|u(t,x)\|_C e^{-\frac{1}{\varepsilon^{1-\beta}}}+\omega_{\bar u}(\varepsilon^\beta)\equiv C_0(\varepsilon),$$

где β - произвольное число из интервала $(0,1)$,

$$\omega_{\bar u}(\delta)=\sup_{\substack{|z-z_0|<\delta\\ x\in[x_0,x]}}\left|u(\varphi^{-1}(z,x),x)-u(\varphi^{-1}(z_0,x),x)\right|,$$

$\varphi^{-1}(z,x)$- обратная функция для функции $z=\varphi(t,x),\ (t,x)\in G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: 1) если $t_0\le t\le\varphi^{-1}(\varepsilon^\beta,x),\ \ x_0\le x\le X$, то из (8) имеем

$$|\phi(t,x,\varepsilon)| \le \omega_{\bar u}(\varepsilon^{\beta}) e^{-\frac{1}{\varepsilon}\varphi(t,x)} + \omega_{\bar u}(\varepsilon^{\beta}) \int_{t_0}^{t} \frac{1}{\varepsilon} K(s,x,s) e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau) d\varphi(\tau)} d\varphi(s) = \omega_{\bar u}(\varepsilon^{\beta}). \qquad (9)$$

2) Если $\varphi^{-1}(\varepsilon^{\beta}, x) \le t \le T$, $x_0 \le x \le X$, то

$$|u(t,x)| \le e^{-\frac{1}{\varepsilon}\varphi(t,x)} \le \|u(t,x)\|_C e^{-\frac{1}{\varepsilon^{1-\beta}}}, \qquad (10)$$

$$\left| \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^{\varphi^{-1}(\varphi(t,x)-\varepsilon^{\beta}, x)} K(s,x,s) e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau) d\varphi(\tau)} [u(t,x) - u(s,x)] d\varphi(s) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\varphi^{-1}(\varphi(t,x)-\varepsilon^{\beta}, x)}^{t} K(s,x,s) e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau) d\varphi(\tau)} [u(t,x) - u(s,x)] d\varphi(s) \right| \le$$

$$\le 2\|u(t,x)\|_C e^{-\frac{1}{\varepsilon^{1-\beta}}} + \omega_{\bar u}(\varepsilon^{\beta}). \qquad (11)$$

Из (9), (10) и (11) следует справедливость леммы 1.

ЛЕММА 2. Пусть функция $H(t,x,s,\varepsilon)$ определена по формуле (6) и выполняются условия а) ,б). Тогда справедлива следующая оценка

$|H(t,x,s,\varepsilon)| \le C_2$, где $C_2 = C(1 + e^{-1})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: С учетом условия б) из (6) получим

$$|H(t,x,s,\varepsilon)| \le \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^t K(\tau,x,\tau) d\varphi(\tau)} C \int_s^t K(\tau,x,\tau) d\varphi(\tau) +$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon^2} \int_s^t K(\tau,x,\tau) e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau) d\varphi(\tau)} \left\{ C \int_s^t K(\nu,x,\nu) d\varphi(\nu) \right\} d\varphi(\tau).$$

Для первого слагаемого

$$C e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau) d\varphi(\tau)} \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t K(\tau,x,\tau) d\varphi(\tau) \right) = \left| \eta = \frac{1}{\varepsilon} \int_s^t K(\tau,x,\tau) d\varphi(\tau) \right| = C\eta e^{-\eta} \le Ce^{-1},$$

для второго

$$C \int_s^t \frac{1}{\varepsilon} K(\tau,x,\tau) e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau) d\varphi(\tau)} \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_\tau^t K(\nu,x,\nu) d\varphi(\nu) \right) d\varphi(\tau) =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \eta = \frac{1}{\varepsilon} \int_s^t K(\tau,x,\tau) d\varphi(\tau) \\ \frac{1}{\varepsilon} \int_s^t K(\tau,x,\tau) d\varphi(\tau) \le \eta \le 0 \end{array} \right| = -C \int_{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau) d\varphi(\tau)}^{t_0} \eta e^{-\eta} d\eta \le C \int_{t_0}^{\infty} \eta e^{-\eta} d\eta \le C.$$

Следовательно, отсюда вытекает справедливость леммы 2.

ЛЕММА 3. Пусть функция $N_1(t,x,s,y,\varepsilon)$ определяется по формуле (7). Если выполняются условия а) -в), то справедлива следующая оценка:

$|N_1(t,x,s,y,\varepsilon)| \le C_3 l_1 l_2$, где $C_3 = C_2(1 + e^{-1})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Принимая во внимание условия а) - в), из (7) получим требуемую оценку.

Далее, в силу лемм 1, 2 и 3 из (5) имеем:

$$\left|\xi(t,x,\varepsilon)\right| \le C_0(\varepsilon) + \int_{t_0}^{t} C_2\left|\xi(s,x,\varepsilon)\right| d\varphi(s) + \int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x} C_3 l_1 l_2 \left|\xi(s,y,\varepsilon)\right| d\psi(y)\, d\varphi(s).$$

Обозначим $a(t,x,\varepsilon) = C_0(\varepsilon) + C_3 l_1 l_2 \int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x} \left|\xi(s,y,\varepsilon)\right| d\psi(y)\, d\varphi(s).$

Тогда

$$\left|\xi(t,x,\varepsilon)\right| \le a(t,x,\varepsilon) + C_2 \int_{t_0}^{t} \left|\xi(s,x,\varepsilon)\right| d\varphi(s). \tag{12}$$

ЛЕММА 4. Лемма Гронуолла-Беллмана:
Если $f(t) \ge 0$ на $[t_0, T]$ то из неравенства

$$y(t) \le b(t) + \int_{t_0}^{t} f(s) y(s) ds\ ,$$

следует неравенство $$y(t) \le b(t) + \int_{t_0}^{t} b(s) f(s) e^{\int_s^t f(\tau) d\tau} ds.$$

В силу лемму (4) из (12) получим:

$$\left|\xi(t,x,\varepsilon)\right| \le a(t,x,\varepsilon) + C_2 \int_{t_0}^{t} a(s,x,\varepsilon) e^{\int_s^t d\varphi(\tau)} d\varphi(s) = a(t,x,\varepsilon) + C_2 \int_{t_0}^{t} a(s,x,\varepsilon) e^{(t-s)} d\varphi(s),$$

или

$$\left|\xi(t,x,\varepsilon)\right| \le C_0(\varepsilon) + C_3 l_1 l_2 \int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x} \left|\xi(s,y,\varepsilon)\right| d\psi(y)\, d\varphi(s) + C_2 C_0(\varepsilon) \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)} d\varphi(s) +$$

$$+ C_2 C_3 l_1 l_2 \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\int_{x_0}^{x} e^{(t-s)} \left|\xi(\tau,y,\varepsilon)\right| d\psi(y)\, d\varphi(\tau)\, d\varphi(s).$$

К тройному интегралу, применив формулу Дирихле, затем заменив τ на s и учитывая, что $C_0(\varepsilon)$ - постоянная, из последнего имеем

$$\left|\xi(t,x,\varepsilon)\right| \le C_0(\varepsilon)\left[1 + C_3 T e^{T}\right] + C_3 l_1 l_2 \int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x} \left[1 + e^{T}(T-s)\right] \left|\xi(\tau,y,\varepsilon)\right| d\psi(y)\, d\varphi(s),$$

или

$$\left|\xi(t,x,\varepsilon)\right| \le a_1(\varepsilon) + \int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x} K_1(T,s,y) \left|\xi(s,y,\varepsilon)\right| d\psi(y)\, d\varphi(s), \tag{13}$$

где $a_1(\varepsilon) = C_0(\varepsilon)\left[1 + C_3 T e^{T}\right],\ K_1(T,s,y) = C_3\, l_1\, l_2 \left[1 + e^{T}(T-s)\right].$

ЛЕММА 5. Пусть $\xi(t,x,\varepsilon)$ - непрерывна, неотрицательна в G и выполняется неравенство (13). Тогда справедлива

$$\xi(t,x,\varepsilon) \le a_1(\varepsilon) \exp\left(\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x} K_1(T,s,y)\, d\psi(y)\, d\varphi(s) \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Обозначим

$$R(t,x,\varepsilon)=a_1(\varepsilon)+\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}K_1(T,s,y)\xi(s,y,\varepsilon)d\psi(y)d\varphi(s). \tag{14}$$

Введем функцию

$$G(R)=\int_{a_1}^{R}\frac{d\xi}{\xi}. \tag{15}$$

Тогда в силу (13)

$$\frac{\partial^2 R}{\partial t\partial x}=K_1(T,t,x)\xi(t,x,\varepsilon)\le K_1(T,t,x)R(t,x,\varepsilon). \tag{16}$$

Находим

$$\frac{\partial^2}{\partial t\partial x}[G(R)]=G'(R)\frac{\partial^2 R}{\partial t\partial x}+G''(R)\frac{\partial R}{\partial t}\cdot\frac{\partial R}{\partial x}. \tag{17}$$

На основании (16) из (17) следует

$$\frac{\partial^2}{\partial t\partial x}[G(R)]-G''(R)\frac{\partial R}{\partial t}\cdot\frac{\partial R}{\partial x}\le G'(R)K_1(T,t,x)R(t,x,\varepsilon). \tag{18}$$

Согласно (15) $G'(R)=\dfrac{1}{R},\quad G''(R)\le 0$, кроме того, из (14) следует,

что $\dfrac{\partial R}{\partial t}$ и $\dfrac{\partial R}{\partial x}$ неотрицательны.

Тогда из (18) имеем

$$\frac{\partial^2}{\partial t\partial x}[G(R)]\le K_1(T,t,x).$$

Проинтегрируем

$$G(R(t,x,\varepsilon))-G(R(t_0,x,\varepsilon))+G(R(t_0,x_0,\varepsilon))\le\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}K_1(T,s,y)d\psi(y)d\varphi(s),$$

или $G(R(t,x,\varepsilon))\le\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}K_1(T,s,y)d\psi(y)d\varphi(s)$.

Следовательно, $R(t,x,\varepsilon)\le G^{-1}\left(\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}K_1(T,s,y)d\psi(y)d\varphi(s)\right)$.

Исходя из (15), получим $G^{-1}(\lambda)=a_1(\varepsilon)e^{\lambda}$.

Таким образом, $R(t,x,\varepsilon)\le a_1(\varepsilon)\exp\left(\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}K_1(T,s,y)d\psi(y)d\varphi(s)\right)$.

Отсюда вытекает справедливость леммы 5.

В силу этой леммы из (13) имеем

$$|\xi(t,x,\varepsilon)|\le C_4C_0(\varepsilon), \tag{19}$$

где $C_4=\left(1+C_3Te^{T}\right)\exp\left\{C_3l_1l_2\left(1+Te^{T}\right)\right\}.$

Таким образом, доказана следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполняются условия а) - в) и уравнение (1) имеет непрерывное решение $u(t,x)$ на G и $u(t_0,x)=0$ при $x\in[x_0,X]$, кроме того, пусть $K(t,x,t)>0$ при почти всех

$(t,x)\in G$. Тогда решение уравнения (2) представимо в виде (3), причем это решение при $\varepsilon\to 0$ сходится к непрерывному решению уравнения (1) в области G и справедлива оценка (19).

Теперь покажем, что решение уравнения (1) единственно в пространстве $C(G)$. Следуя по вышеизложенному методу, из (2) получим:

$$u(t,x,\varepsilon)=\int_{t_0}^{t}H(t,x,s,\varepsilon)u(s,x,\varepsilon)d\varphi(s)+\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}N_1(t,x,s,y,\varepsilon)u(s,y,\varepsilon)d\psi(y)d\varphi(s)+F_1(t,x,\varepsilon)\ , \quad (20)$$

где $H(t,x,s,\varepsilon)$ и $N_1(t,x,s,y,\varepsilon)$ определены по формулам (6) и (7) соответственно,

$$F_1(t,x,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}f(t,x)-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{t_0}^{t}K(s,x,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau)}f(s,x)d\varphi(s). \quad (21)$$

Предварительно докажем следующую лемму.

ЛЕММА 6. Если функция $F_1(t,x,\varepsilon)$ определена формулой (21), то для нее справедлива оценка

$$|F_1(t,x,\varepsilon)|\le\frac{2\|f(t,x)\|_C}{\varepsilon},\quad (t,x)\in G. \quad (22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Действительно, из (21) имеем

$$|F_1(t,x,\varepsilon)|\le\frac{\|f(t,x)\|}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{t_0}^{t}K(s,x,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau)}|f(s,x)d\varphi(s)|\le$$

$$\le\frac{\|f(t,x)\|}{\varepsilon}+\frac{\|f(t,x)\|}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\frac{1}{\varepsilon}K(s,x,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau)}d\varphi(s)\le\frac{2\|f(t,x)\|_C}{\varepsilon}.$$

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполняются условия а) - в) и $\int_{t_0}^{t}K(s,x,s)d\varphi(s)>0$ при $(t,x)\in G$. Тогда решение уравнения (1) в пространстве непрерывных функций на G единственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть $u(t,x)$- ненулевое решение уравнения (1) при $f(t,x)\equiv 0.$ Тогда в силу условий а) -в) можно показать, что $u(t_0,x)=0$ на $[x_0,X]$. В самом деле, пусть

$$\int_{t_0}^{t}K(t,x,s)u(s,x)d\varphi(s)+\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}N(t,x,s,y)u(s,y)d\psi(y)d\varphi(s)\equiv 0 \qquad \text{при} \qquad (t,x)\in G.$$

Последнее преобразуем к эквивалентному уравнению

$$u(t_0,x)\int_{t_0}^{t}K(s,x,s)d\varphi(s)=-\int_{t_0}^{t}[K(t,x,s)-K(s,x,s)]u(s,x)d\varphi(s)-$$

$$-\int_{t_0}^{t}K(t,x,s)[u(s,x)-u(t_0,x)]d\varphi(s)-\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}[N(t,x,s,y)-N(s,x,s,y)]u(s,y)d\psi(y)d\varphi(s).$$

В силу условий а) - в) отсюда имеем

$$|u(t_0,x)|\int_{t_0}^{t}K(s,x,s)d\varphi(s)\le\|u(t,x)\|_C C\int_{t_0}^{t}\int_{s}^{t}K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau)d\varphi(s)+$$

$$+\sup_{\substack{s\in[t_0,t]\\ x\in[x_0,x]}}|u(s,x)-u(t_0,x)|\int_{t_0}^{t}K(s,x,s)d\varphi(s)+\|u(t,x)\|_C C_1l_1l_2\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}\int_{s}^{t}K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau)d\psi(y)d\varphi(s).$$

Отсюда применяя формулу Дирихле, затем заменив τ на s и в силу теоремы о среднем имеем

$$|u(t_0,x)|\int_{t_0}^{t} K(s,x,s)d\varphi(s) \le \|u(t,x)\|_C C\int_{t_0}^{t}\left[\int_{t_0}^{t} K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau)\right]d\varphi(s)+$$

$$+\sup_{\substack{s\in[t_0,t]\\ x\in[x_0,x]}}|u(s,x)-u(t_0,x)|\int_{t_0}^{t} K(s,x,s)d\varphi(s)+C_1l_1l_2\|u(t,x)\|_C\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}\left[\int_{t_0}^{t} K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau)\right]d\psi(y)d\varphi(s).$$

По условию теоремы $\int_{t_0}^{t} K(s,x,s)d\varphi(s)>0$ при $x\in[x_0,X]$.

Тогда имеем

$$|u(t_0,x)| \le C\|u(t,x)\|_C[\varphi(t)-\varphi(t_0)]+\sup_{\substack{s\in[t_0,t]\\ x\in[x_0,x]}}|u(s,x)-u(t_0,x)|+$$

$$+C_1\,l_1\,l_2\|u(t,x)\|_C[\psi(x)-\psi(x_0)][\varphi(t)-\varphi(t_0)], \qquad (t,x)\in G.$$

Отсюда, переходя к пределу при $t\to 0$, получим $u(t_0,x)=0$ при $x\in[x_0,X]$.

Далее, учитывая леммы 2, 3 и 6 используя леммы 4 и 5, из (20) имеем

$$u(t,x)\equiv 0 \text{ на } G \text{ при } f(t,x)\equiv 0.$$

Тогда в силу (19) из (3) имеем

$$\|u(t,x)\|_C \le C_4\,C_0(\varepsilon),$$

где $0<\varepsilon<\varepsilon_0$.

Отсюда при $\varepsilon\to 0$ вытекает, что $u(t,x)\equiv 0$ на G при $f(t,x)\equiv 0$.

Теорема доказана.

Литература

1. *Асанов А.* Регуляризация и достаточные условия единственности решения линейного интегрального уравнения типа Вольтерра первого рода с двумя независимыми переменными в пространстве непрерывных функций // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. - Фрунзе: Илим , 1979. - Вып.12.- С.154-165.
2. *Асанов А.* Регуляризация и единственность решения линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям.- Фрунзе: Илим, 1980. –Вып.13.- С.207-215.
3. *Бухгейм А. Л.* Операторные уравнения Вольтерра в шкалах банаховых пространств // Докл. АН СССР. -1978 . –Т.242, №2.- С.272-276.
4. *Иманалиев М.И., Асанов А.* О решениях систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода // Докл. АН СССР.-1989.-Т.309, №5.-С.1052-1055.
5. *Иманалиев М.И., Асанов А.* О решениях систем нелинейных двумерных интегральных уравнений Вольтерра первого рода // Докл. АН СССР.-1991. -Т.317, №1.- С.32-35.
6. *Лаврентьев М.М.* Об интегральных уравнениях первого рода // Докл. АН СССР. -1959. -Т.127, № 1.- С. 31-33.
7. *Сергеев В.О.* Регуляризация уравнений Вольтерра первого рода // Докл. АН СССР. -1971. -Т. 197, № 3.- С.531-534.