Классификации применения компьютеров в математических исследованиях
Кененбаева Г. М.[1], Касымова Т. Д.[2], Аскар к. Л.[3]

[1]Кененбаева Гулай Мекишовна / Kenenbaeva Gulai Mekishovna - кандидат физико-математических наук, доцент,
кафедра прикладной математики и информатики;
[2]Касымова Тумар Джапашевна / Kasymova Tumar Japashevna – кандидат физико-математических наук, доцент,
кафедра алгебры, геометрии и топологии;
[3]Аскар кызы Лира / Askar kyzy Lira - старший преподаватель,
кафедра кибернетики и компьютерных технологий,
факультет математики, информатики и кибернетики,
Кыргызский национальный университет им. Ж. Баласагына, г. Бишкек, Кыргызская Республика

Аннотация: *некоторые математические результаты могут быть доказаны дедуктивными методами. Если их сложно обосновать математически, то можно подтвердить численными или компьютерными экспериментами. Поскольку дисплей – реальный объект, компьютерное представление математического результата уже указывает на возможность его реализации. В связи с этим в данной работе предложены различные классификации применения компьютеров в математических исследованиях и некоторые особенности полученных результатов.*
Abstract: *some mathematical results can be proved by deductive methods. If it is difficult to prove mathematically, then it can be confirm computer or numerical experiments. Since the display is a real object, computer representation of the mathematical result is already pointing to the possibility of its implementation. In this regard, in this paper we propose various classifications of the computers using in mathematical research and some features of the results.*

Ключевые слова: *классификация,* *явления в математике,* *эффект,* *вычислительный эксперимент, сингулярное возмущение, дифференциальное уравнение.*
Keywords: *classification, phenomena in mathematics, effect, computational experiment, singular perturbation, differential equation.*

Введение

Модификации построенных компьютерных программ и результаты вычислительного эксперимента могут дать новые явления, выявить новые типы особых случаев в математических исследованиях и в математическом моделировании.

При этом возникает закономерный качественный вопрос: *Соответствует ли данная математическая модель результатам эксперимента?*

Утвердительный ответ подтверждает адекватность модели, а отрицательный — доказывает ее неприемлемость.

Классификации

Различают следующие классификации применения компьютеров к прикладным задачам в математике:

1. - ***По связи ответа данного компьютером с истинным.***

При строгой (математической) постановке задачи на поиск объекта ответ, данный компьютером (результат работы программы), может:

1.1) заведомо совпадать с истинным (если нет ошибок в самой программе);

1.2) иметь гарантированную связь с истинным (в тех случаях, когда истинный ответ нельзя изобразить средствами компьютера);

1.3) иметь нестрогую (статистическую) связь с истинным.

Все эти вычисления могут производиться для различных целей. Первая возможность достигается при использовании точных методов (взаимно-однозначного соответствия между математическим объектом и физическим состоянием ЭВМ при его соответствующей интерпретации). Неформально их можно разделить на точные вычисления (с целыми числами и подобными им объектами) аналитические (символьные, алгебраические) преобразования и эвристически-логический вывод. Таким путем были получены и доказаны разнообразные результаты по теории чисел, теории конечных групп, по достаточным условиям управляемости, наблюдаемости и устойчивости систем.

2. - ***По целям, которые ставит человек.***

Здесь можно выявить следующие цели:

2.1) Прогнозирование будущего – экстраполяция.

2.2) Выбор оптимального варианта действий.

2.3) Выявление скрытой или не доступной непосредственно информации (это может быть связано с решением систем уравнений и неравенств).

2.4) Выявление (открытие) закономерностей.

Возможны также комбинации этих целей. Например, сочетание прогнозирования с оптимизацией (вероятностная оптимизация). Результаты 2.3 и 2.4 потом могут быть использованы для целей 2.1 и 2.2. Все результаты могут использоваться либо для построения объекта (проектирования), либо для поиска уже существующего объекта по его выявленным свойствам и координатам и т. д. Эти приложения кратко охватываются не вполне определенным термином «прикладная математика».

2.5. Наглядное представление математических объектов - для решения многих научных задач - всегда одна из актуальных целей.

В последние годы, в связи с появлением высокопроизводительных дисплеев эту цель можно уточнить:

2.5а. Написать программу, которая работает в интерактивном режиме, адекватно представляет некоторый математический объект и дает пользователю возможность самому исследовать его свойства путем выбора представлений. Некоторый шаг в этом направлении был сделан в [3].

Для развития самой математической науки можно использовать компьютер для следующих целей:

2.6. Выдвижение и проверка математических гипотез (здесь особенно важны результаты 2.5а). Вопрос о выдвижении гипотез был систематически развит Д. Пойа, идею об использовании компьютеров сформулировал С. Улам, общий термин «экспериментальная математика» был предложен У. Гренандером.

2.7. Строгое доказательство теорем (в том числе и найденных по методу 2.6). В свою очередь, такие доказательства можно неформально подразделить следующим образом: дающие истинные результаты (п. 1.1):

а) эвристически-логические методы;

б) символьные преобразования;

в) точные вычисления и обеспечивающие гарантированную связь;

г) доказательные вычисления.

Для сочетания достоинств приближенных методов и математической строгости и было разработано второе направление; в [8-10] и [12] был предложен термин «доказательные вычисления» (ДВ) (по-английски этот термин сейчас употребляется в виде «Varified computing»).

Как и другие комбинированные человеко-машинные методы, метод ДВ содержит схемы (предназначенные для человека) сведения различных задач к нескольким стандартным и алгоритмы (для ЭВМ) решения этих задач.

Вследствие того, что основной объект математического анализа - вещественное число — не имеет «конструктивных представлений, точные результаты для непрерывных объектов (функций, геометрических фигур) можно получить на ЭВМ только в особых случаях. Это и вызвало развитие приближенных методов, которые имеют такие широкие приложения к практическим задачам.

В теоретических исследованиях отмеченный недостаток (наличие только статистической связи между точным и приближенным результатом) дает возможность применять эти методы только для эвристического поиска закономерностей (экспериментальная математика), которые потом устанавливаются дедуктивно. Для примера приведем сингулярно-возмущенное обыкновенное дифференциальное уравнение с малым параметром и с данными (1) [2], где явление углубляющегося пограничного слоя сначала было проверено путем приближенного решения, а потом доказано строго:

$$\mathrm{b}=5,\ y_0=0,\quad f(t,y)=-(t(y-1)+1)\cos^2 y+(y-1)\sin^2 y. \qquad (1)$$

Здесь можно принять

$$u_k=-(k\pi+\pi/2),\quad v_k=-(k\pi+\pi),\quad t_k=1/(k\pi+\pi),\quad k=1,2,3,\dots,K=\pi.$$

При $y<0$ имеем:

$$f(0,y)=-\cos^2 y+(y-1)\sin^2 y=-\cos^2 y+(y-1)\sin^2 y=-1+y\sin^2 y<0.$$

При $y<0$ и $0\le t$ имеем:

$$f(t,u_k)=0+(u_k-1)\cdot 1<0.$$

При $y<0$ и $t_k\le t$ имеем:

$$f(t,v_k)=-(t(-(k\pi+\pi)-1)+1)\cdot 1+0=t(k\pi+\pi+1)-1\ge t_k(k\pi+\pi+1)-1=$$
$$=(k\pi+\pi+1)/(k\pi+\pi)-1>0.$$

Для неформальной проверки полученных результатов была составлена программа для приближенного решения задачи по методу Рунге-Кутта 4-го порядка на языке Pascal. Для повышения точности вычислений шаг в окрестности точки пограничного слоя $(t=0)$ был выбран меньше, чем на всем отрезке.

Программа и результаты:

```
program boun_1;
Uses crt;
Var x, y, h, eps, x12, y12: real;
k, nout : integer;
Function f(x, y: real) : real;
begin
f:=-(x*(y-1)+1)*sqr(cos(y))+(y-1)*sqr(sin(y));
end;
BEGIN {eps*y′=f(x.y)}
clrscr;
X:=0; y:=0; {-10<y<1}
eps:=0.01; nout:=1000;
h:=0.0001;
for k:=0 to 20000 do
begin
if k mod nout = 0 then writeln(′y(′, x:4:1,′)=′, y:8:5, y/pi:10:2);
y12:=y+h/2*f(x,y)/eps;
x12:=x+h/2;
y:=y+h*f(x12, y12) / eps;
x:=x+h;
end;
readln;
END.
```

Выполненные расчеты для $\varepsilon = 0.1, \varepsilon = 0.01, \varepsilon = 0.001, \varepsilon = 0.0001$ подтвердили наличие явления дискретно углубляющегося пограничного слоя:

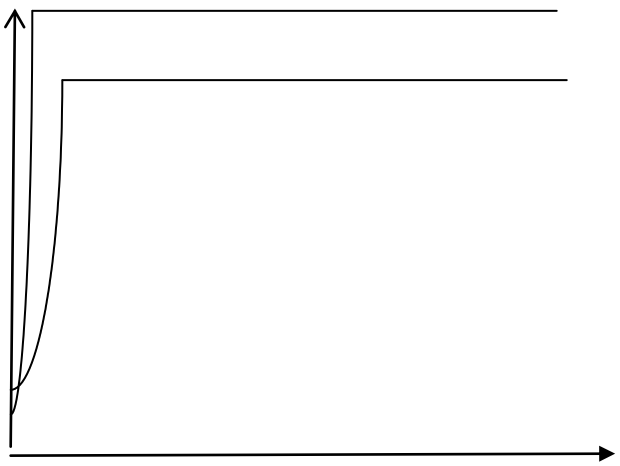

Рис. 1

Коснемся истории такого подхода. Хотя первый результат — границы в рациональных числах для π — был получен Архимедом, впервые возможность получения строгой информации численными методами (применением направленного округления) была отмечена только С. М. Лозинским в 1962 г.

С формальной точки зрения, всякий такой результат (например, 1.41<2) можно было бы назвать «теоремой». Но в теоретических исследованиях под «теоремами» обычно понимаются содержательные результаты, сформулированные в терминах соответствующего раздела математики. С этой оговоркой укажем, что предложение о систематическом применении численных методов для доказательства теорем было сделано в [3], где также выявлены разделы математики, в которых возможно такое применение, и получен ряд новых результатов, улучшающих известные или дающих ответы на поставленные в литературе вопросы.

Для формулировки теорем [11] применены построения конструктивного математического анализа. Кроме известного определения вычислимого числа (ВЧ) как предела алгоритмически сходящейся последовательности рациональных чисел, введены определения [11] односторонне псевдовычислимого числа (ОПВЧ) как предела ограниченной монотонной алгоритмически заданной последовательности, рациональных чисел и конструктивно устойчивого предиката (КУП), обобщающие свойства, называемые в различных разделах математики «грубость».

Доказано, что: задача установления, истинности конструктивно устойчивого предиката (КУП) на конструктивно компактном множестве (ККМ) - алгоритмически полуразрешимая; значения экстремума вполне вычислимой функции на подмножестве ККМ, определенном условиями вида $H(x)\leq 0$ и $H(x)<0$, являются ОПВЧ, но могут не быть ВЧ. Отсюда, в частности, следует, что не существует прямых методов доказательств сходимости методов условной оптимизаций в вычислительной математике без дополнительных ограничений снизу на скорость изменения функции $H(x)$.

С использованием выше описанных результатов установлена полуразрешимость задач доказательства геометрических и других типов неравенств, задач расположения наборов фигур на ограниченных участках плоскости, вычислимость констант. Сделан также общий вывод [11] о том, что после получения любой (грубой) оценки для константы, возникшей в теоретических исследованиях, следует не пытаться ее улучшить усложнением построений, а доказывать вычислимость (или одностороннюю псевдовычислимость), после чего задача улучшения оценки из творческой превращается в техническую.

3. - ***По используемым программным средствам.***

Рекомендуем использовать как универсальные языки типа Pascal, так и специализированные математические средства типа Mathematica 3.0, MathLab, MathCad …

Рассмотрим сингулярно-возмущенное дифференциальное уравнение: $(\varepsilon+t^2+at^3)\,(2y_\varepsilon(t)+3ay_\varepsilon^2(t))y_\varepsilon'(t)=(2t+3at^2)\,(y_\varepsilon^2(t)+3ay_\varepsilon^3(t)),\, t\in[-1,\,1],$ (2)

с начальным условием. Поскольку это уравнение слишком сложное для аналитического исследования, было применено программное обеспечение MathCad, с использованием метода Рунге-Кутта. Было выбрано a=0.2.

Вычисления с ε=0.002, ε=0.001, ε=0.0002 дали похожие результаты

С помощью MathCad обнаружено явление преобразования решений вырожденного уравнения для дифференциальных уравнений при малых возмущениях.

Программа и результат расчета для этого явления

ep=0.002, *a*=0.2

$$f(x,y) := \left[\left[2\cdot x+3\cdot(a\cdot x)^2\right]\cdot\frac{y+a\cdot y^2}{\left(ep+x\cdot x+a\cdot x^3\right)\cdot(2+3\cdot a\cdot y)}\right]$$

$$k := \mathrm{rkfixed}(1,-1,1,200,f)$$

$$k1 := k^{\langle 1\rangle}$$

$k^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	-1	-0.99	-0.98	-0.97	-0.96	-0.95	-0.94	-0.93
1	1	0.989	0.978	0.968	0.957	0.946	0.935	0.925

$$k0 := k^{\langle 0\rangle}$$

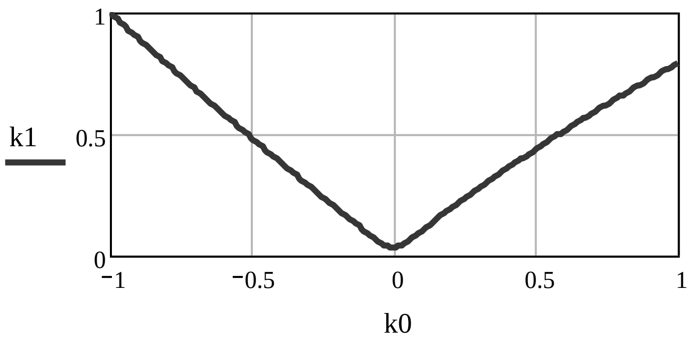

Рис. 2

Таким образом, обнаружено явление преобразования решения вырожденного уравнения.

Определение 1. [3] Если вырожденное уравнение для уравнения (2) имеет гладкое решение, удовлетворяющее начальному условию, предел решения задачи $\lim_{\varepsilon\to 0} y_\varepsilon(t)$ существует, но не удовлетворяет соотношению

$\lim_{\varepsilon\to 0} \|y_\varepsilon(t)\| = \|y_0(t)\|$, то будем говорить, что имеет место *явление преобразования решения вырожденного уравнения*.

4. *Схемы и определения для конкретных разделов математики.*

С использованием результатов п. 2 выделены характеристические признаки существенно используемых в математике понятий «эффекта» и «явления», установлены необходимые условия для возможности возникновения бифуркаций и возникновения «эффектов» и «явлений» для скалярного сингулярно-возмущенного обыкновенного дифференциального уравнения.

Методы исследования [3] заключаются в доказательстве ряда лемм и теорем, которые используются при построении алгоритмов решения и поиска новых эффектов и явлений в теории дифференциальных и разностных уравнений.

Основные определения.

***Определение* 2** [6]. Будем называть «*явлением*» P свойство некоторого обособленного класса объектов из X, для которых не выполняется свойство B.

Понятию «обособленный» можно придать более точный смысл: если класс X представляет собой множество и в нем можно ввести меру, то «явление» – это такое свойство, которое выполняется на множестве меры нуль, то есть «почти никогда».

***Определение* 3** [6]. «*Эффектом*» будем называть свойство E объектов $x \in X$, имеющих свойство A, но такое, что логическое доказательство $A \Rightarrow E$ очень сложно и свойство E было обнаружено не путем логического вывода, а путем эксперимента (как в физике или химии) или путем вычислительного эксперимента.

***Определение* 4**. Будем говорить, что для семейства Y имеет место явление пограничного слоя (ширины не менее a), если выполняется следующее условие:

$(*)$ существует такое $a>0$, что для любого малого $\delta>0$ можно найти такое $\varepsilon_0>0$, что для любых $\varepsilon<\varepsilon_0$ и $y\in Y$ существуют такие $t_1,t_2\in\Delta$ области определения функций семейства Y, что

$$\left\|y_\varepsilon(t_1)-y_\varepsilon(t_2)\right\|>a, \quad \left|t_1-t_2\right|<\delta.$$

Наиболее общий класс пространств, для которых может иметь место такое явление – это равномерные пространства [1].

***Определение* 4а**. Будем говорить, что для семейства Y непрерывных функций $y_\varepsilon(t)\colon \Delta\to F$, где Δ и F – равномерные пространства с равномерностями W_Δ и W_F соответственно, имеет место явление пограничного слоя (ширины не менее $A\in W_F$), если выполняется следующее условие:

$(**)$ существует такое $A\in W_F$, что для любого $V\in W_\Delta$ можно найти такое $\varepsilon_0>0$, что для любых $\varepsilon<\varepsilon_0$ и $y\in Y$ существуют такие

$t_1, t_2\in\Delta$, что $(y_\varepsilon(t_1), y_\varepsilon(t_2))\notin A$, $(t_1,t_2)\in V$.

В качестве класса X можно принимать в основном дифференциальные уравнения, в качестве свойства B – решения x уравнений с дополнительными условиями: локально существует, единственно, продолжимо на всю область определения, непрерывно зависит от параметра.

Такой выбор класса X обусловлен еще и тем, что, если в качестве называемой переменной взято время, то «эффекты» и «явления» можно называть словом «события». Также будем рассматривать вычислительную математику, где «события» возникают в процессе вычислений.

Примечание. Слово «эффект» в различных языках происходит от латинского слова, обозначающего «действие». То есть «эффект» можно объяснить как неожиданное воздействие начального условия (точка) A на объект x. Слово «явление» является точным переводом латинского слова «*phenomen*», оно используется и в русском языке, в том числе в математике: «феномен». В кыргызском языке – «кубулуш».

Теоретические результаты. С помощью схем п. 3 и основных определений п. 4 получен ряд новых результатов в теории динамических систем [3] и в синергетике. С помощью метода малого параметра установлено, что особые положения механизмов [3], [7] (термин, который раньше не был строго определен) в статических задачах механики соответствуют явлению негладкой зависимости решений систем алгебраических уравнений от исходных данных.

- Найдены достаточные условия существования явления дискретно углубляющегося пограничного слоя для скалярного сингулярно-возмущенного обыкновенного дифференциального уравнения [2], [3].

- Обнаружено явление углубляющегося всплеска в теории скалярных сингулярно–возмущенных дифференциальных уравнений [3].
- Обнаружено явление сингулярного цикла для системы сингулярно-возмущенных автономных дифференциальных уравнений, полученной преобразованием уравнения Ван-дер-Поля [3].
- Для одного уравнения с малым параметром обнаружено новое явление типа странного аттрактора, аналогичное известному явлению странного аттрактора для систем более чем двух уравнений в теории сингулярно-возмущенных систем [3].
- Обнаружено явление практического расщепления траекторий в теории сингулярно-возмущенных систем [3].

Прикладные результаты. В качестве прикладных задач можно рассматривать задачи из теории механизмов и из синергетики; получены следующие результаты:

- Впервые предложено единообразное и строгое определение особых положений и на основе метода малого параметра со строгим обоснованием, выявлены особые случаи в теории механизмов [7].

Рассмотрим прикладные задачи, связанные с диссипативными системами (настолько сложными, что их исчерпывающее аналитическое исследование невозможно). В качестве примера приведем [5], где понадобилось выдвинуть гипотезу о наличии в математике явления, соответствующего экспериментально установленному явлению, обозначаемому кыргызским бытовым словом «иргөө» (дискретная оптимизация при помощи синергетики). Если поместить в вибрирующий выпуклый сосуд большое количество (абсолютно твердых) шаров различных размеров, сделанных из одного материала, то через некоторое время самый большой шар окажется наверху посередине. (То есть, энергия поступает упорядоченно, в форме вибрации, а рассеивается в форме тепла).

Видно, что данное явление является слишком сложным для того, чтобы можно было обосновать математически, но его можно подтвердить численными экспериментами. В связи с этим в [5] была выдвинута гипотеза (в терминах теории вероятностей) о том, что в некотором классе случайных процессов с достаточно большим количеством шаров различной величины с учетом силы тяжести при времени $t \to \infty$ самый большой шар будет находиться наверху посередине. Для систематического исследования данного явления составлена программа на языке Delphi. В этой программе можно выбирать количество шаров и различные параметры процесса.

Л и т е р а т у р а

1. *Борубаев А. А.* Равномерные пространства и равномерно непрерывные отображения. – Фрунзе: Изд-во «Илим», 1990. — 171 с.
2. *Иманалиев М. И., Панков П. С., Кененбаева Г. М.* Явление углубляющегося пограничного слоя в теории сингулярно-возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений // Исследование по интегро-дифференциальным уравнениям, вып. 33. Бишкек: Изд-во «Илим», (2004). - С. 15-19.
3. *Кененбаева Г. М.* Теория и методика поиска новых эффектов и явлений в теории возмущенных дифференциальных и разностных уравнений. / Научная монография – Б.: Изд-во «Илим», 2012. - 204 с.
4. *Кененбаева Г. М., Арзыбаев А. М.* Математическое и компьютерное исследования явлений в теории механизмов // Международный научно-исследовательский журнал «Успехи современной науки и образования», № 5, (2015). - С. 134-137.
5. *Кененбаева Г. М., Мураталиева В. Т., Мамадразаков Ж. Б.* Численные эксперименты по исследованию явления иргөө-дискретной оптимизации синергетическими методами // Вестник КРСУ: «Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений», Том 2. Бишкек, (2013). – С. 198-201.
6. *Кененбаева Г. М., Касымова Т. Дж.* Computer Modeling of Phenomena in Dynamical Systems // Наука, техника и образование, (РФ), 12 (18), (2015). - С. 7-10.
7. *Кененбаева Г. М., Касымова Т. Дж.* Поиск особых положений в теории механизмов // Наука, техника и образование, (РФ), 12 (18), (2015). - С. 11-14.
8. *Панков П. С.* Доказательные вычисления на электронных вычислительных машинах. — Фрунзе: Изд-во «Илим», 1978. — 179 с.
9. *Панков П. С.* Комбинированный метод доказательства некоторых теорем математического анализа при помощи ЭВМ // Кибернетика. 3 (1978). - С. 119-125.
10. *Панков П. С., Кененбаева Г. М.* Применение доказательных вычислений к поиску стационарных точек системы дифференциальных уравнений, описывающих противовирусную иммунную реакцию // Исследования по ннтегро-дифференц. уравнениям; вып. 22, Фрунзе: Изд-во «Илим», (1989). - С. 189-192.
11. *Панков П. С., Кененбаева Г. М.* От приближенных вычислений – к компьютерной математике // Известия НАН КР, Изд-во «Илим», 1995. – С. 7-10.

12. *Шарый С. П.* Конечномерный интервальный анализ. – Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск: Изд-во «XYZ», 2013. – 606 с.