

Дифракция антиплоских гармонических SH-волн на неподвижной полосе, прикрепленной к границе упругого полупространства

Казей И. С.

Казей Игорь Сергеевич / Kazei Igor Sergeevich – кандидат физико-математических наук, доцент,
кафедра прикладной математики,
факультет фундаментальных наук,
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение Высшего образования
Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана»,
г. Москва

Аннотация: в статье рассмотрена задача о дифракции антиплоских волн сдвига (SH-волн) на неподвижной жесткой полосе, скрепленной с поверхностью упругого полупространства. При помощи интегральных преобразований задача сводится к решению парных интегральных уравнений, а затем к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода. Найдены выражения для напряжений на границе полупространства под полосой и сила, действующая на неподвижную полосу.

Abstract: the diffraction of antiplane shear waves (SH-wave) on a fixed rigid strip attached to the surface of an elastic half-space is considered in this article. With integral transforms the problem reduces to the solution of pair integral equations, and then to Fredholm integral equations of the second kind. Expressions for stresses on the surface of a half-space and the force acting on the stationary strip were obtained.

Ключевые слова: волна сдвига, жесткая полоса, упругое полупространство, преобразования Фурье, интегральные уравнения, функции Бесселя, напряжения.

Keywords: shear wave, rigid strip, elastic half-space, Fourier transformation, integral equations, Bessel functions, stresses.

1. Введение. Одной из самых трудных задач динамики сооружений является их расчет на действие сейсмических волн. Массивная конструкция вносит возмущение в первоначальное поле перемещений, вызываемое падающей волной. Задачи, учитывающие это возмущение, называют дифракционными, а их решение уточняет характер результирующего воздействия на сооружение. При рассмотрении протяженного инженерного сооружения, один из размеров которого значительно превосходит два других (фундамент протяженного здания, трубопровод), его можно приближенно заменить полосой (или пластиной) бесконечной длины. В статье рассмотрена вспомогательная задача такого рода, когда жесткая полоса бесконечной длины прикреплена к поверхности упругого полупространства и считается неподвижной.

2. Постановка задачи. Введем декартову систему координат x , y , z . Упругое полупространство занимает область $y \geq 0$, а полоса прикреплена к ней на участке $-a \leq x \leq a$ поверхности плоскости $y = 0$ (Рис. 1).

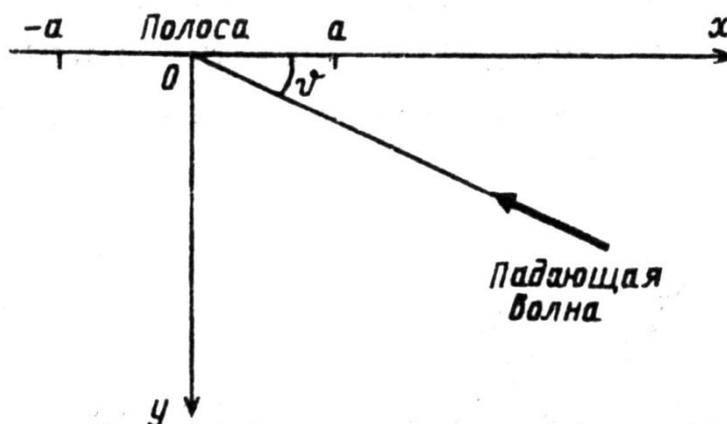


Рис. 1

Ось z перпендикулярна плоскости рисунка. В случае антиплоской деформации отличными от нуля будут перемещение $w = w(x, y, t)$ вдоль оси z и напряжения $\tau_{xz}(x, y, t) = \mu(\partial w / \partial x)$,

$\tau_{yz}(x, y, t) = \mu(\partial w / \partial y)$, где μ - константа Ламе. Уравнение движения упругой среды сводится при этом к волновому уравнению относительно W :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (1)$$

где $c = (\mu / \rho)^{1/2}$ - скорость волны сдвига, ρ - плотность упругой среды.

Пусть падающая гармоническая волна имеет вид:

$$w^{(i)}(x, y, t) = w_0 \exp\{-i[\alpha(x \cdot \cos(\vartheta) + y \cdot \sin(\vartheta)) + \omega t]\},$$

где w_0 - амплитуда, ω - круговая частота, $\alpha = \omega / c$ - волновое число, ϑ - угол между осью x и направлением распространения волны.

Выражение для полного волнового поля представим в форме

$$w = w^{(i)} + w^{(0)} + w^{(d)}, \quad (2)$$

в которой для рассматриваемой стационарной задачи отраженная от поверхности свободной от напряжения, волна и добавочное поле, вызванное наличием жесткой полосы, имеют соответственно вид

$$w^{(0)}(x, y, t) = w_0 \exp\{-i[\alpha(x \cdot \cos(\vartheta) - y \cdot \sin(\vartheta)) + \omega t]\},$$

$$w^{(d)}(x, y, t) = w^*(x, y) \exp(-i\omega t).$$

Теперь подставляя (2) в (1) и отделяя переменную по времени, получим для $w^*(x, y)$ уравнение Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} + \alpha^2 w^* = 0.$$

Поскольку поверхность полупространства под полосой неподвижна ($w = 0$), а оставшаяся часть поверхности свободна от напряжений ($\tau_{yz} = 0$), то для $w^*(x, y)$ имеет граничные условия

$$w^*(x, 0) = -2w_0 \exp(-i\alpha x \cos(\vartheta)), \quad |x| < a,$$

$$\tau_{yz}^*(x, 0) = \mu(\partial w^* / \partial y)_{y=0} = 0, \quad |x| > a.$$

На концах полосы, в точках изменения типа граничных условий перемещения должны быть непрерывны, а напряжения могут обладать интегрируемой особенностью. Родственные по математической постановке задачи рассмотрены в [1, 2]. Вид падающей волны и линейность задачи позволяют разбить w^* , τ_{yz}^* на симметричную и антисимметричную составляющие:

$$w^* = \hat{w}^* + \tilde{w}^*, \quad \tau_{yz}^* = \hat{\tau}_{yz}^* + \tilde{\tau}_{yz}^*,$$

где \hat{w}^* , $\hat{\tau}_{yz}^*$ - четные функции по x ; \tilde{w}^* , $\tilde{\tau}_{yz}^*$ - нечетные функции по x .

3. Симметричные составляющие \hat{w}^* , $\hat{\tau}_{yz}^*$. Граничные условия для симметричной составляющей \hat{w}^* при $y = 0$ имеет вид

$$\hat{w}^*(x, 0) = -2w_0 \cos(\alpha x \cos(\vartheta)), \quad 0 \leq x < a, \quad (3)$$

$$\hat{\tau}^*(x, 0) = \mu(\partial \hat{w}^* / \partial y)_{y=0} = 0, \quad x > a. \quad (4)$$

С помощью косинус-преобразования Фурье решение уравнения Гельмгольца для W^* можно представить следующим образом:

$$\hat{w}^*(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty A(s) \exp(-\gamma y) \cos(sx) ds, \quad (5)$$

где $\gamma = (s^2 - \alpha^2)^{1/2}$ при $s \geq \alpha$ и $\gamma = -i(\alpha^2 - s^2)^{1/2}$ при $s < \alpha$.

Выбор ветвей γ подробно обсужден в [3]. Используя интегральное представление (5) в граничных условиях (3), (4), получим парные интегральные уравнения для неизвестной функции $A(s)$:

$$\frac{2}{\pi_0} \int_0^{\infty} sA(s) \sin(sx) ds = -2w_0 \alpha \cos(\vartheta) \sin(\alpha x \cos(\vartheta)), \quad 0 \leq x < a; \quad (6)$$

$$\frac{2}{\pi_0} \int_0^{\infty} \gamma A(s) \cos(sx) ds = 0, \quad x > a.$$

Решение этих интегральных уравнений будем искать в форме

$$\gamma A(s) = \frac{\pi}{2} \left[aC^* J_0(sa) + \int_0^a \varphi(\tau) J_0(s\tau) d\tau \right], \quad (7)$$

где $\varphi(\tau)$ - неизвестная вспомогательная функция, непрерывная на промежутке $[0; a]$; $J_0(s)$ - функция Бесселя первого рода.

Подставляя $A(s)$ из (7) в (6) получим, что второе уравнение удовлетворяется тождественно, а первое после ряда преобразований приводится к интегральному уравнению типа Абеля для $\varphi(\tau)$:

$$\int_0^x \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(x^2 - \tau^2)^{1/2}} = -2w_0 \alpha \cos(\vartheta) \sin(\alpha x \cos(\vartheta)) - \int_0^a \left[\int_0^{\infty} f^*(s) J_0(s\tau) \sin(sx) ds \right] \varphi(\tau) d\tau - aC^* \int_0^{\infty} f^*(s) J_0(sa) \sin(sx) ds,$$

где $f^*(s) = (s/\gamma) - 1$.

Обращая это уравнение, вводя безразмерные переменные

$$\xi = \tau/a, \quad \eta = \zeta/a \quad (8)$$

и полагая

$$C^* = (\tau_0/\mu)C, \quad \varphi(\tau) = (\tau_0/\mu) \xi^{1/2} \Phi(\xi), \quad \tau_0 = 2w_0 \mu \alpha, \quad (9)$$

приходим к уравнению Фредгольма второго рода для $\Phi(\xi)$:

$$\Phi(\xi) + \int_0^1 \Phi(\eta) F(\xi, \eta) d\eta = -\xi^{1/2} J_0(\alpha \xi \cos \vartheta) \cos^2(\vartheta) - CF(\xi, 1),$$

где $F(\xi, \eta) = (\xi\eta)^{1/2} \int_0^{\infty} s f^* \left(\frac{s}{a} \right) J_0(s\xi) J_0(s\eta) ds, \quad 0 \leq \xi \leq 1$.

Пусть $\Phi(\xi) = \Phi_1(\xi) \cos^2(\vartheta) + \Phi_2(\xi)C$. Тогда

$$\Phi_1(\xi) + \int_0^1 \Phi_1(\eta) F(\xi, \eta) d\eta = -\xi^{1/2} J_0(\alpha \xi \cos \vartheta), \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (10)$$

$$\Phi_2(\xi) + \int_0^1 \Phi_2(\eta) F(\xi, \eta) d\eta = -F(\xi, 1) \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (11)$$

Константу C определяем из соотношения, полученного с помощью граничного условия (3) при $x = 0$ и формул (5), (7). С учетом определения $\Phi_1(\xi)$ и $\Phi_2(\xi)$ имеем

$$C = - \frac{1/\alpha^2 a^2 + \cos^2(\vartheta) \int_0^1 \Phi_1(\xi) \cdot \chi(\xi) d\xi}{\chi(1) + \int_0^1 \Phi_2(\xi) \cdot \chi(\xi) d\xi},$$

где $\chi(\xi) = \chi_1(\xi) + i \cdot \chi_2(\xi)$, $\chi_1(\xi) = -(\pi/2) \xi^{1/2} J_0(\alpha \xi / 2) Y_0(\alpha \xi / 2)$, $Y_0(\xi)$ - функция Бесселя второго рода, $\chi_2(\xi) = (\pi/2) \xi^{1/2} (J_0(\alpha \xi / 2))^2$.

4. Антисимметричные составляющие \tilde{w}^* , $\tilde{\tau}_{yz}^*$. Граничные условия для антисимметричной составляющей \tilde{w}^* при $y = 0$ имеет вид

$$\tilde{w}^*(x, 0) = i2w_0 \sin(\alpha x \cos(\vartheta)), \quad 0 \leq x \leq a; \quad (12)$$

$$\tilde{\tau}_{yz}^*(x, 0) = \mu(\partial \tilde{w}^* / \partial y)|_{y=0} = 0, \quad x > a. \quad (13)$$

С помощью синус-преобразования Фурье решение уравнения Гельмгольца для \tilde{W}^* можно представить в виде

$$\tilde{w}^*(x, y) = \frac{2}{\pi_0} \int_0^\infty B(s) \exp(-\gamma y) \sin(sx) ds. \quad (14)$$

Используя представление (14) в граничных условиях (12), (13), получаем парные интегральные уравнения для неизвестной функции $B(s)$:

$$\frac{2}{\pi_0} \int_0^\infty B(s) \sin(sx) ds = i2w_0 \sin(\alpha x \cos(\vartheta)), \quad 0 \leq x < a; \quad (15)$$

$$\frac{2}{\pi_0} \int_0^\infty s^{-1} \gamma B(s) \cos(sx) ds = 0, \quad x > a.$$

Функцию $B(s)$ будем искать в виде

$$s^{-1} \gamma B(s) = \frac{\pi}{2} \int_0^a \tau \psi(\tau) J_0(s\tau) d\tau, \quad (16)$$

где $\psi(\tau)$ - неизвестная функция, непрерывная на промежутке $[0, a]$.

Используя формулу (16) в (15) получим, что второе уравнение удовлетворяется тождественно, а первое приводится к уравнению типа Абеля

$$\int_0^x \frac{\psi(\tau) \tau d\tau}{(x^2 - \tau^2)^{1/2}} = i2w_0 \sin(\alpha x \cos(\vartheta)) - \int_0^a \tau \psi(\tau) \int_0^\infty f^*(s) J_0(s\tau) \sin(sx) ds d\tau.$$

Вводя безразмерные переменные (8) и полагая, как в (9),

$$\psi(\tau) = (\tau_0 / \mu) \cos(\vartheta) \cdot [\Psi(\xi) / \xi^{1/2}],$$

получаем интегральное уравнение Фредгольма второго рода для $\Psi(\xi)$

$$\Psi(\xi) + \int_0^1 \Psi(\eta) F(\xi, \eta) d\eta = i\xi^{1/2} J_0(\alpha a \xi \cos \vartheta), \quad 0 \leq \xi \leq 1. \quad (17)$$

5. Напряжения под полосой и сила, действующая на полосу. Интегральные представления (5), (14) и выражения (7), (16) для $A(s)$ и $B(s)$ позволяют написать выражения для напряжений и перемещения в упругом полупространстве. Для амплитуд напряжений на границе упругого полупространства под полосой имеем

$$\hat{\tau}_{yz}^*(x, 0) = -\tau_0 \alpha a \cdot \left\{ C \cdot \left[\left(1 - (x/a)^2\right)^{-1/2} - \int_{x/a}^1 \xi^{1/2} \Phi_2(\xi) \cdot \left(\xi^2 - (x/a)^2\right)^{-1/2} d\xi \right] + \right. \\ \left. + \cos^2(\vartheta) \cdot \int_{x/a}^1 \xi^{1/2} \Phi_1(\xi) \cdot \left(\xi^2 - (x/a)^2\right)^{-1/2} d\xi \right\},$$

$$\tilde{\tau}_{yz}^*(x, 0) = -\tau_0 \cos(\vartheta) (x/a) \left[\Psi(1) \left(1 - (x/a)^2\right)^{-1/2} - \int_{x/a}^1 [\Psi(\xi) / \xi^{1/2}] \left(\xi^2 - (x/a)^2\right)^{-1/2} d\xi \right]$$

Заметим, что $\hat{\tau}_{yz}^*(x, 0) = \tilde{\tau}_{yz}^*(x, 0) = 0$ для $|x| > a$.

Для определения амплитуды силы, действующей на неподвижную полосу, нужно проинтегрировать $\hat{\tau}_{yz}^*(x, 0)$ и $\tilde{\tau}_{yz}^*(x, 0)$ по x в пределах от $-a$ до a . Учитывая, что для нечетной функции $\tilde{\tau}_{yz}^*(x, 0)$ получим при этом нуль, в итоге имеем

$$R = -2\pi w_0 \mu \alpha^2 a^2 \left\{ C \left(1 + \int_0^1 \Phi_2(\xi) \xi^{1/2} d\xi\right) + \cos^2(\vartheta) \int_0^1 \Phi_1(\xi) \xi^{1/2} d\xi \right\}. \quad (18)$$

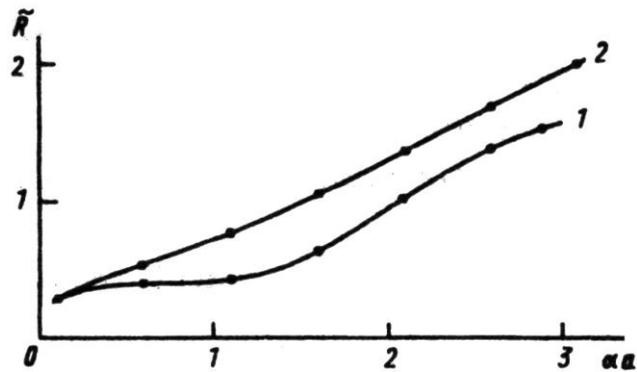


Рис.2

6. Результаты расчетов и выводы. Итак, рассматриваемая задача свелась к решению интегральных уравнений Фредгольма второго рода (10), (11) для функций $\Phi_1(\xi)$, $\Phi_2(\xi)$ в случае симметричных составляющих \hat{W}^* и уравнению (17) для функции $\Psi(\xi)$ в случае антисимметричных составляющих \tilde{W}^* . Эти уравнения решались методом простой интеграции. Безразмерная амплитуда силы $\tilde{R} = |R/2\pi i \omega_0|$ вычислялась с использованием формулы (18). При $0,1 \leq \alpha a \leq 3,0$ построен график зависимости \tilde{R} от αa , изображенный на Рис. 2 (кривая 1 – для угла падения $\mathcal{G} = 0$, а кривая 2 – для угла падения $\mathcal{G} = \pi/2$). В рассматриваемом диапазоне αa для данных углов падения волны \tilde{R} монотонно возрастает.

На Рис. 3 представлена зависимость \tilde{R} от \mathcal{G} при различных значениях αa : кривая 1 построена при $\alpha a = 1$, а кривая 2 при $\alpha a = 2$. Максимальные амплитуды силы получаются при нормальном падении волны.

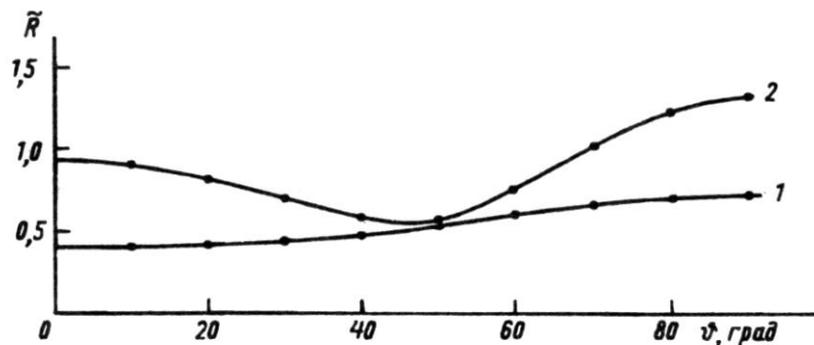


Рис. 3

Литература

1. Loeber J. F., Sih G. C. Diffraction of antiplane shear waves by a finite crack. // J. Acoust. Soc. Amer. 1968. Vol. 44, No 1. P. 90-98.
2. Sih G. C. Singular solution near a rigid ribbon excited by plane waves. // J. Franklin. Inst. 1968. Vol. 286, No 2, 152-157.
3. Нобл Б. Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Издательство иностранной литературы, 1962. 280 с.