Расчёт численностей поисковых шаблонов в парадоксе Пенни
Филатов О. В.

Филатов Олег Владимирович / Filatov Oleg Vladimirovich - инженер-программист,
Научно-технический центр «Модуль», г. Москва

Аннотация: *даны формулы расчёта числа встреч любой комбинации в длинной случайной бинарной последовательности на примере поисковых шаблонов из парадокса Уолтера Пенни (игра Пенни); показана конкуренция шаблонов и возникающие при ней эффекты; показана связь между инверсиями элементарных событий и вероятностью выпадения содержащего их слова (шаблона); в основу расчётов положены формулы и базовые понятия новой вероятностной теории - «Потоковой теории».*
Abstract: *we give formulas for calculating the number of meetings of any combination in a long sequence of random binary search patterns with examples of paradox Walter Penny (Penny game); shows competition patterns and effects arising from it; It shows the relationship between inversions of elementary events and the probability of having their words (template); calculations based on a formula and the basic concepts of probability theory, the new - «flow theory».*

Ключевые слова: *игра Пенни, парадокс Уолтера Пенни, инверсионный переход, число инверсий, инверсные спектры, монотонные спектры, расчёт числа побед, поисковый шаблон, правила поиска, составное событие, цуга, эл, потоковая теория, выпадение монеты, конкуренция шаблонов, число встреч шаблона, случайная бинарная последовательность.*
Keywords: *Game Penny, Penny Walter paradox, inversion shift, the number of inversions, inverse spectra, monotonous spectra, calculation of the number of victories, the search pattern, the search rules, a composite event, train, email, streaming theory, competition pattern, falling coins, the number of meetings template, random binary sequence.*

Сокращения: п-ть – последовательность; ф. – формула, эл – элементарное событие (выпадение монеты).

Введение

Парадокс Уолтера Пенни [6] открыт относительно недавно и поэтому он малоизвестен. Многие люди, которые не имели возможности написать программу для его проверки, или хотя бы видеть работу этой программы, отказываются верить в его суть, настолько эти явления противоречат устоявшимся стереотипам.

Правила игры Пенни одновременно являются и правилами угадывания (поиска) задуманных комбинаций. В игре два игрока придумывают две разные комбинации. Обозначим правила поиска этих комбинаций через R_1.

Правила поиска R_1. Придумать комбинацию из трёх выпадений монеты (поисковый шаблон). Причём в шаблоне есть первое и последнее событие. Последовательно бросать монету, каждый результат её выпадения дописывать как единицу или нуль к предыдущим результатам. После каждого броска три последних результата выпадения монеты сравнивают с поисковым шаблоном. Последнее событие шаблона сравнивается с последним записанным результатом выпадения монеты. Когда единицы и нули шаблона совпадут с тремя последними записанными результатами выпадения монеты, тогда партия заканчивается победой совпавшего шаблона и ростом его очков на единицу. Начинается новая партия с новой записью результатов выпадений монеты. Игра Пенни состоит из множества партий. Побеждает игрок с большим числом выигранных партий.

Число встреч шаблона (например «101») по разным правилам: R_1 и R_n, обычно различны. Это очевидное утверждение (по разным правилам поиска находят разные количества вхождения шаблона в п-ть) обычно забывают при получении данных, противоречащих устоявшемуся стереотипу ожидания.

Разные способы поиска приводят к разным количествам найденных шаблонов. В [1, 2, 3, 4] правила R_0. Формулы для расчёта численностей событий по правилам R_0 (правилам обнаружений составных событий в «Потоковой теории») будут использованы для расчёта числа встреч каждого из восьми шаблонов игры Пенни. То есть, в этой статье рассчитывается число нахождений каждого из восьми шаблонов Пенни в бинарную п-ть из *N* бросков монеты. Каждый из восьми шаблонов ищется по правилам R_1 (игра Пенни) отдельно от других шаблонов. В основу расчёта положены формулы, описывающие структуру случайной бинарной последовательности [1, 2, 3, 4], которые были получены из правил поиска R_0.

В таблице 1 приведены количества вхождений поисковых шаблонов, найденных по правилам R_1 в случайной п-ти. Поиск числа вхождений каждого из шаблонов производился независимо от всех других семи шаблонов. Бинарная п-ть была просмотрена поисковой программой восемь раз. За один проход учитывались только выпадения одного шаблона.

Таблица 1. Раздельный поиск комбинаций по правилам игры Пенни (R_1)

1	2	3	4

	(Оконечные спектры)	(Монотонные спектры)	(Инверсные спектры)	
	«100»; «011»; «001»; «110»	«111»; «000»	«101»; «010»	∑S
	1 инверсия	0 инверсий	2 инверсии	
5 6	250106 2501064 249948 2499486	1426539 1428865	2000318 2001218	16858041
	Среднее число событий п-ти приходящееся на выпадение одного поискового шаблона			
	$\bar{n} =$ N / S(«100») → 8	$\bar{n} =$ N / S(«000») → 14	$\bar{n} =$ N/S(«010») → 10	
	N=2·10^7 бросков монеты			

Таблица 1 построена по результатам работы той же поисковой программы, которая демонстрирует истинность существования парадоксальных результатов игры Пенни. В таблице 1 представлены числа шаблонов, найденных по правилам R_1 в бинарной п-ти из N = 2·10^7 бросков монеты. Эти результаты нарушают устоявшиеся интуитивные ожидания. Интуитивно ожидалось, что числа вхождений каждого из шаблонов в случайную последовательность будут совпадать друг с другом с точностью до случайного отклонения. Но в действительности численности шаблонов делятся на три различные количественные группы: «100», «011», «001», «110» - первая группа; «111»; «000» - вторая; «101»; «010» - третья.

Основная часть

Обозначения в формулах: (*int*) *X* – оператор, округляющий число *X* до наименьшего целого. Например: 0 = (*int*) 0.9; 3 = (*int*) 3.14.

Расчёт числа вхождений шаблонов «010», «101», обнаруживаемых по правилам поиска R_1, в случайной бинарной последовательности.

Произведём расчёт численности поисковых шаблонов, найденных по правилам игры Пенни (R_1) и представленным в таблице 1.

Замечаем, что поисковые шаблоны «010», «101» являются не оформленными цугами [1, 2, 3] $^1C_3$. Цуги – это повторяющиеся друг за другом инверсные события одинаковой длины: «110011...», «111000111...», «101010...» [1, 2, 3]. Ф. 0 связывает: число цуг, образованных составными событиями длины n и числом колен w, с числом N - бинарных событий случайной п-ти F0.5 (N):

$$^{n}C_{wN} = \frac{(2^n - 1)^2}{2^{n(w+2)+1}} N \qquad \text{Ф. 0}$$

В таблице 2 представлены вхождения короткого шаблона «010» внутрь длинных цуговых цепочек ^1C_n.

Таблица 2. Вхождение шаблона «010» внутрь цуг ^1C_n.

	Y;X→ `				4	5	6	
	$^1C_0/2$ =	1011	**10**100	**10**1011	1 **10**10100	1 **10**101011	1**1** **0**1010100	…
	^1C =		$^1C_2/2$	$^1C_3/2$	$^1C_4/2$	$^1C_5/2$	$^1C_6/2$	…
	6 25000 =		12500	56250	7 8125	3 9063	19 531	…
	$^1C_0/2$ =	**01**00	**01**011	**01**0100	0 **01**01011	0 **01**010100	0**0** **1**0101011	…
	^1C =	$^1C_1/2$	$^1C_2/2$	$^1C_3/2$	$^1C_4/2$	$^1C_5/2$	$^1C_6/2$	…
	1 250000 =	25000	12500	56250	7 8125	3 9063	19 531	…
	$^1C_0$ =	$^1C_1$	$^1C_2$	$^1C_3$	$^1C_4$	$^1C_5$	$^1C_6$	…
	N $/2^3$ =	$/2^4$	$/2^5$	$/2^6$	N $/2^7$	N $/2^8$	N/ 2^9	…

	2					1	7	38
	500689 =	250406	25314	12721	55678	8558	952	…
0	$N=2\cdot10^7$; $^1C_0 = 2500000$; $^1a_0 + {}^1C_0 / 2 = ({}^1C_0 / 2 - {}^1C_1 / 2) + {}^1C_0 / 2 = 1875000$							

Будем нумеровать ячейки таблицы 2 парой (X; Y), где X – номер столбца, а Y – номер строки. Так, ячейка (1,1) содержит «11011», где «0» - единичная цуга $^1C(0)_1$, а «11» - это характерное (образующие) её окружение. Ячейка (1,4) содержит «00100», где «1» - единичная цуга $^1C(1)_1$, а «00» - это характерное (образующие) её окружение.

Из равной вероятности выпадений цуг следует: $^1C(0)_1={}^1C(1)_1$, и их численности в F0,5(N) равновероятны. Отсюда: $^1C_1= {}^1C(0)_1+ {}^1C(1)_1= {}^1C_1 / 2 + {}^1C_1 / 2$. Численность $^1C_1$ отображена в ячейках (1, 8) и (1, 9), работа [4].

Но поисковый шаблон «00100» содержит внутри себя игровую комбинацию Пенни (она подчёркнута) ячейки (1,4) и (1,5), а поисковый шаблон «11011» не содержит внутри себя эту поисковую комбинацию (поэтому ячейки (1, 2) и (1, 3) пусты). Поэтому численность всех фрагментов п-ти войдёт в итоговое число найденных комбинаций «010», а вклад всех фрагментов «11011» в итоговое число найденных комбинаций «010» будет равен нулю (в «11011» нет комбинации «010»).

В столбце 3 показаны численности полярных цуг $^1C(01)_2$ – комбинация «110100» и $^1C(10)_2$ – комбинация «001011». В обеих комбинациях содержатся поисковые шаблоны Пенни («010», подчёркнуты). Обе комбинации внесут по равному вкладу в итоговую численность найденного шаблона «010», ячейки (2, 2), (2, 3) и (2, 4), (2, 5).

Равная численность комбинаций: «1101011» , «0010100» (столбец 3) и «11010100» , «00101011» (столбец 4) , будет обнаружена в п-ти F0,5 (N). Все комбинации внесут по равному вкладу (приблизительно: $^1C_3/2= 156250$) в итоговую численность найденного шаблона «010».

В столбце 5 величина вклада комбинации (спектра) «001010100» будет в два раза больше, чем у комбинации (спектра) «110101011». Так как в спектре «001010100» уже содержатся два поисковых шаблона (подчёркнуты), а в спектре «110101011» содержится только один поисковый шаблон «010».

Число n(w) поисковых шаблонов «010» внутри любого члена спектрального ряда из строки 1 таблицы 2 (с передним образующим окружением из единиц («11»)), находится по ф. 1:

$$n(w) = (int)\frac{w+2}{4};\ w = 1, 2, 3, \ldots \tag{1}$$

Где: w – длина цуги или число полуволн (число единиц и нулей) в цуге. Числа вхождений шаблонов «010» в спектры строки 1 таблицы 2, рассчитанные по ф. 1: 0 (w=1); 1 (w=2); 1 (w=3); 1 (w=4); 1 (w=5); 2 (w=6).

Суммируя численности цуг, представленные в строках 2 или 3, таблицы 2, и умножая их на число вхождений (ф. 1) шаблона «010» в соответствующий спектр строки 1, получим число A - вхождений шаблона «010» во все спектры строки 1 таблицы 2, ф.2:

$$A = \sum_{w=1}^{\infty} \frac{{}^1C_w}{2} \cdot n(w) = \sum_{w=1}^{\infty} \frac{{}^1C_w}{2} \cdot (int)\frac{w+2}{4} = \sum_{w=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{N}{2^{w+3}} \cdot (int)\frac{w+2}{4} \tag{2}$$

По ф. 2 для п-ти из $N=2\cdot10^7$ случайных бинарных событий ^1A= 666666,7.

Переходим к расчёту шаблонов «010», которые будут обнаружены поисковыми правилами R_1, в спектрах строки 4 таблицы 2. По ф. 3 рассчитываются количества вхождений шаблона «010» в спектры строки 4 таблицы 2:

$$n(w) = 1 + (int)\frac{w-1}{4};\ w = 1, 2, 3, \ldots \tag{3}$$

Где: w – длина цуги или число полуволн (число единиц и нулей) в цуге. Числа вхождений шаблонов «010» в спектры строки 4 таблицы 2, рассчитанные по ф. 1: 1 (w=1); 1 (w=2); 1 (w=3); 1 (w=4); 2 (w=5); 2 (w=6).

Суммируя численности цуг, представленные в строках 5 или 6, таблицы 2, и умножая их на число вхождений (ф. 3) шаблона «010» в спектры строки 4, получим число B - вхождений шаблона «010» во все спектры строки 4 таблицы 2, ф. 4:

$$B = \sum_{w=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{N}{2^{w+3}} \cdot \left(1 + (int)\frac{w-1}{4}\right) \tag{4}$$

По ф. 2 для п-ти из $N=2\cdot10^7$ случайных бинарных событий B = 1333333,3.

Складываем вместе численности шаблонов A и B, которые будут найдены по правилам поиска R_1 в спектрах строк 1 и 2, таблицы, ф. 5:

$$A+B=\sum_{w=1}^{\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{N}{2^{w+3}}\cdot(int)\frac{w+2}{4}+\sum_{w=1}^{\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{N}{2^{w+3}}\cdot\left(1+(int)\frac{w-1}{4}\right) \quad (5)$$

По ф. 5 для п-ти из N=2·10[7] случайных бинарных событий А+B = 2000000, рассчитанный результат хорошо совпадает с количеством поисковых шаблонов «010» в таблице 1 (2001218), найденных поисковой программой по правилам R_1 в п-ти F0.5 (2·10 [7]).

Расчёт числа вхождений шаблона «101» в п-ть при поиске по правилам R_1. Замечаем, что поисковый шаблон «101» получается инверсией из шаблона «010». Рассуждения для шаблонов «101» либо зеркально симметричны, либо после обратимого преобразования «101»→«010» описаны выше.

Из обратимых преобразований: «101» → «010» →«101» следует, что ф. 5 применима и для поисковых шаблонов «101». Это объясняет равенство найденных значений шаблонов: «010» и «101», поисковой программой по правилам R_1 в п-ти F0.5 (2·10 [7]) в таблице 1.

Определим под инверсионными спектрами чередования нулей и единиц, например: «10», «101», «1010», «01010…» (заметим, что инверсионные спектры являются не оформленными цугами). Мат. ожидание инверсионных спектров длины n, которые будут найдены поисковой программой по правилам R_1 в п-ти F0.5(N), рассчитываются по ф. 6 - 8.

По ф. 6 рассчитывают мат. ожидание для спектров, состоящих из нечётного числа w нулей и единиц: $w(n)=2n-1$; n=1,2,3 … .

$$^{1}C(R_1)_{w=2n-1}=\frac{3\cdot N}{2^{w+2}-2},\text{где } n=1,2,3,\ldots \quad (6)$$

По ф. 7 рассчитывают мат. ожидание для инверсионных спектров, состоящих из чётного числа w нулей и единиц: $w(n)=2n$; n=1,2,3 … .

$$^{1}C(R_1)_{w=2n}=\frac{^{1}C(R_1)_{w-1}}{2}=\frac{3\cdot N}{2^{w+2}-4};\ n=1,2,3,\ldots \quad (7)$$

В таблице 3 даны инверсионные спектры, с их мат. ожиданиями, рассчитанными по ф. 6 и ф. 7, и найденными в п-ти F0.5 (2·10[7]) количествами.

Таблица 3. Численности инверсных спектров

Спектр (длина)	М.О. ф.6	найдено	Спектр (длина)	М.О. ф.7	найдено
0(1)	10000000	10000249	10(2)	5000000	5000055
101(3)	2000000	2000318	0101(4)	1000000	1000810
01010(5)	476190,	476803	010101(6)	238095,	238171
1010101(7)	117647,	117938	01010101(8)	58823,	59239
010101010(9)	29325,	29589	1010101010(10)	14662,	14581
10101010101(11)	7326,	7321	101010101010(12)	3663,	3694
Таблица 3, ∑	12630488	12632218		6315243	6316550
∑(∞)	12632930,6			6316465,3	

Отношение числа нечётных спектров к чётным равно двум: $\frac{\text{нечёт } n}{\text{чёт } n+1}=\frac{3\cdot N}{2^{n+2}-2}:\frac{3\cdot N}{2(2^{n+2}-2)}=\frac{2(2^{n+2}-2)}{2^{n+2}-2}=2$.

Формулы 6 и 7 можно объединить в одну ф. 8:

$$^{1}C(R_1)_{w}=\frac{3\cdot N}{2^{w+2}-3+(-1)^{w+1}};\ w=1,2,3,\ldots \quad (8)$$

Где: w – число единиц и нулей спектра; N – число бинарных событий в п-ти.

Расчёт числа вхождений шаблонов «100», «011», «001», «110», обнаруживаемых по правилам поиска R_1, в случайной бинарной последовательности.

Замечаем, что все шаблоны из столбца 1 таблицы 1 содержат инверсионный (инверсный) переход *It – Inversion transition*. Полный перечень инверсионных переходов: «01», «10». Причём, *It* (инверсионный переход) ограничивает в указанных шаблонах составное событие [1, 2, 3, 4]. А именно, в шаблонах: «100»; «011» It открывает (слева) составное событие, а в шаблонах: «001»; «110» It закрывает (справа) составное событие. Поэтому число шаблонов («100»+ «011» =S) из столбца 1 таблицы 1 будет равно числу составных событий S п-ти [5] («100»+ «011» =S; «001»+ «110» =S) за вычетом составных событий первой моды ^{1}S. И S рассчитывается по ф. 9.0:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} {}^{n}S - {}^{1}S = \frac{N}{2} - \frac{N}{4} = \frac{N}{4} \qquad (9.0)$$

Где: N – число бинарных событий в п-ти.

Половина составных событий рассчитанных в ф. 9.0 образована из нулей, а половина из единиц. Учитывая, что $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$, переходим от составных событий S к полярным составным событиям SX, получаем формулу расчёта численности шаблонов, найденных по правилам R_1 в последовательности из N случайных событий, ф. 9.1:

$$SX = \frac{S}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{N}{2^{n+1}} - {}^{1}S \right) = \frac{N}{8} \qquad (9.1)$$

Действительно, согласно ф. 9.1, численность каждого из шаблонов столбца 1 таблицы 1, найденного поисковой программой по правилам R_1, стремится к $2 \cdot 10^7 / 8 \rightarrow 2500000$.

Расчёт числа встреч шаблонов по правилам R_1, содержащих инверсионный переход It после первого с краю элементарного события (в слове из n событий первое или последнее событие не равно другим событиям, все n-1 события равны друг другу, кроме первого события, либо кроме n-го события). Например: «111110», «011…11», «100».

Рассмотрим поисковый шаблон «01111». ${}^{4}S$ – составное событие минимальной длины, которое совпадёт с этим поисковым шаблоном: «011110». Следовательно, начала всех событий от ${}^{4}S$ и длиннее будут совпадать с этим шаблоном.

Обозначим число одинаковых событий данного типа буквой k, а буквой n длину поискового шаблона. Причём k = n - 1. Тогда, число всех составных событий S длины k = n-1 и более рассчитывается по ф. 9.2:

$$S = \sum_{k}^{\infty} {}^{k}S - \sum_{k=k-1}^{\infty} {}^{k}S = \frac{N}{2^{k-1}} - \frac{N}{2^k} = \frac{N}{2^k} \qquad (9.2)$$

Учитывая, что число полярных составных событий SX составляет половину от числа S, полученного по ф. 9.2, получаем формулу расчёта для поисковых шаблонов любой длины n = k+1, ф. 10:

$$SX = \frac{S}{2} = \frac{N}{2^{k+1}} \qquad (10)$$

В таблице 4 представлены оконечные спектры с их мат. ожиданиями, рассчитанными по ф. 10, и найденными в п-ти F0.5 ($2 \cdot 10^7$) количествами.

Таблица 4. Численности оконечных спектров

Спектр (k)	М.О.(SX) ф. 10	найдено	Спектр (k)	М.О.(SX) ф. 10	найдено
100(2)	2500000	2501065	0111111(6)	156250	156021
1000(3)	1250000	1249426	01111111(7)	78125	78071
10000(4)	625000	625487	011111111(8)	39062,	39115
100000(5)	312500	312690	0111111111(9)	19531,	19645

Расчёт числа вхождений шаблонов «000», «111» обнаруживаемых по правилам поиска R_1 (игры Пенни), в случайной бинарной последовательности.

Ключ к расчёту численностей, как и в случае с инверсными шаблонами «010» и «101», лежит в ответе на вопрос: сколько раз поисковый шаблон умещается в длинных спектрах? Как и в случае с инверсными спектрами «010» и «101», надо найти распределение длинных составных событий ${}^{n}S$ (например: «11111111111») и учесть все вхождения в них шаблона «111» или «000».

Число вхождений k шаблона длиной L=3 («000», «111») в более длинный спектр: n ≥ L, рассчитывается по ф. 11:

$$k(n) = (int)\frac{n}{L};\ где\ n = 1,2,3, \ldots \qquad (11)$$

При L=3, ряд вхождений *k(n)* будет выглядеть: 0(n=1); 0(n=2); 1(n=3); 1(n=4); 1(n=5); 2(n=6); … И складывая произведения $k(n) \cdot {}^{n}S$, где ${}^{n}SX$ – число полярных составных событий [1, 2, 3, 4, 5] в бинарной последовательности (${}^{n}SX = {}^{n}S/2$), получим формулу для количественного расчёта S нахождения комбинаций «000», «111» по правилам R_1 (игра Пенни) в случайной последовательности, ф. 12:

$$SX = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} {}^{n}S \cdot k(n) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{N}{2^{n+1}} \cdot (int)\frac{n}{L}\right);\ n = 1,2,3,\ldots \quad (12)$$

При L=3 и N=2·10^7^ , по ф. 12 получим: S=1428571, что хорошо совпадает с экспериментальными данными из столбца 2 таблицы 1. Формула 12 может быть переписана в виде ф. 13:

$$SX = \frac{1}{2} \cdot \frac{N}{2^L - 1};\ L = 1,2,3,\ldots \quad (13)$$

Где: SX – число полярных составных событий [1, 2, 3, 4] длины L (например, L=3: «000», «111»), которые будут найдены по правилам R_1 (игра Пенни); N – число элементарных событий п-ти (бросков монеты); L – длинна поискового шаблона (L=3 в игре Пенни).

Для игры Пенни, при L=3 и $N=2\cdot10^7$ по ф. 13, получаем: $SX = \frac{1}{2} \cdot \frac{N}{2^3-1} = 1428571$, что хорошо совпадает с экспериментальными данными из столбца 2 таблицы 1.

<u>Обсуждения</u>

Среднее число $\bar{n}$ событий последовательности, приходящееся на выпадение одного поискового шаблона.

Обозначим символом $\bar{n}$ среднее число событий п-ти, приходящееся на выпадение одного поискового шаблона в игре Пенни. Из таблицы 1 видно, что число встреч шаблона зависит от его структуры, столбцы: 1 - оконечные спектры (структура ipp), 2 – монотонные спектры (структура ppp), 3 – инверсные спектры (структура iii). В таблице 1 рассчитаны средние числа выпадений монет, приходящиеся на выпадение одного поискового шаблона данного типа T (структуры): $\bar{n} = N/S_t$, где S_t – число шаблонов данного типа, N – количество событий п-ти.

Используя правила поиска шаблонов Пенни (R_1), можно предложить игру «Пираты и попугай», которая демонстрирует парадокс разных вероятностей выпадения двух конкурирующих друг с другом шаблонов.

Легенда игры «Пираты и попугай» (правила R_2*).* Два пирата доверили боевому другу, попугаю, поделить им монеты из сундука. В сундуке серебряные (0) и золотые (1). Попугай вытаскивал из сундука по одной монете. Как только из последних трёх вытащенных монет складывался поисковый шаблон (таблица 1), так пират, его придумавший, сгребал кучку монет к себе, и начинался делёж новой партии монет, доставаемых попугаем.

Расчёт всех комбинаций ставок этой игры привести не позволяет формат статьи. Но вот самая интересная пара пиратских ставок: «100» и «000» (инверсные ставки: «011», «111»). Смоделируем результаты дележа на компьютере (Переживёт ли попугай результат дележа по правилам R_2?).

В сундуке было $N=2\cdot10^7$ монет. Конкурирующие между собой шаблоны: «100» и «000» разбили эту п-ть ($N=2\cdot10^7$) на 2856747 партии. Результаты компьютерного моделирования представлены в таблице 5.

Таблица 5. Экстремальные ставки игры «Пираты и попугай» (R_2)

	«100» (A)	«000»(|B)	«011»(A)	«111»(|B)
Побед шаблона	2498933	357814	2500390	356458
Теоретический расчёт побед	2500000	357142,86	2500000	357142,86
Золотых монет («1») Серебряных монет («0»)	9999749 8926807	0 1073442	8930377 10000249	1069374 0
Всего монет ($N=2\cdot10^7$)	18926556 (94,6%)	1073442 (5,4%)	18930626 (94,7%)	1069374 (5,3%)
Выигранных монет за партию	7,57	3	7,57	3
Вероятности выигрыша Пенни	p(A)=7/8	p(B)=1/8	p(A)=7/8	p(B)=1/8
$N=2\cdot10^7$; число партий игры для пары: g=2856747 (2857142,86)				

Расчёт числа побед шаблона «100» («011») над шаблоном «000» («111»). Замечаем, что структура ipp («100») соответствует началу нового составного события, длина которого от двух эл и выше [1, 2, 3]. Следовательно, число побед шаблона «100» это число начал полярных (в данном случае образованных из «0») составных событий с длиной n > 1. Число полярных составных событий ${}^{n}SX$, длины n рассчитывается [1, 2, 3]: ${}^{n}SX = \frac{1}{2} \cdot \frac{N}{2^{n+1}}$, где $X \in \{0;1\}$. Сумма ${}^{n}S0$ для n>1, является числом побед шаблона «100» над шаблоном «000», ф. 13.1:

$$^{n>1}SX = A = \frac{1}{2}\cdot\sum_{n=2}^{\infty}\frac{N}{2^{n+1}} = \frac{N}{8} \qquad (13.1)$$

Замечаем, что структура шаблона «011» соответствует началам составных событий с длиной n > 1 [1, 2, 3]. Число составных событий, образованных из «0», динамически стремится к числу событий, образованных из «1». Число начал $^{n}S0$ равно числу начал $^{n}S1$. Следовательно, число побед спектра «011» над спектром «111» так же рассчитывается по ф. 13.1. Пример, по ф. 13.1 мат. ожидание при N=2·10^{7} для $^{n>1}S0$ и $^{n>1}S1$ равно 2500 000, оно хорошо совпадает с найденными экспериментальными значениями «Побед шаблона» «100», «011» в таблице 5.

Расчёт числа побед шаблона «000» («111»). Замечаем, что структура шаблонов – ppp («000», «111»). Поэтому эти шаблоны являются либо составными событиями длины три, либо являются фрагментами более длинных составных событий. И методика расчёта числа побед этих шаблонов совпадает с вышеописанной методикой расчёта шаблонов структуры iii («101», «010»). В таблице 6 показано, сколько раз шаблон «111» входит в составные события ^{n}S («$1_1 1_2 \ldots 1_n$»).

Таблица 6. Вхождение шаблона «111» внутрь событий А

Y;X→ ↓		3	4	5	6	
	110	01110	011110	0111110	01111110	…
		^{3}S·k(n)/2	^{4}S·k(n)/2	^{5}S·k(n)/2	^{6}S·k(n)/2	…
	357142,86 =	156250	78125	39062,5	39062,5	…
N=2·10^{7}; B=357142,86						

Числа полярных составных событий рассчитываются по ф. [1, 2, 3, 5]: $^{n}S1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{N}{2^{n+1}}$. Число вхождений нескольких шаблонов «111» в длинное составное событие (таблица 6 строка 1) рассчитывается по ф. 13.2:

$$k(n) = (int)\frac{n}{L};\ n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (13.2)$$

И число побед А шаблона «111» (L=3) рассчитывается по ф. 13.3:

$$B = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{A}{2^{n+1}}\cdot(int)\frac{n}{L}\ \text{, где } L = 3 \qquad (13.3)$$

Где: L – длинна шаблона; n = длинна составных событий; А – значение формулы 13.1. Ф. 13.3 применима для любых монотонных шаблонов длин L > 2 при правилах поиска R_1 и R_2.

Рассчитанное по ф. 13.3, для L=3 значение побед шаблона хорошо совпадает с экспериментально полученными значениями для шаблонов «000» и «111» (таблица 5).

Представленные в строке 1 таблицы 5 числа побед шаблонов, рассчитанные по формулам 13.1, 13.3 их мат. ожидания, используются для расчёта вероятностей выигрыша шаблонов в игре Пенни [6]. Вероятности, полученные через экспериментальные значения, совпали с полученными другими путями вероятностями побед шаблонов Пенни. Теоретически рассчитанные вероятности побед шаблонов совпали с полученными другими путями вероятностями побед шаблонов Пенни: $p(A) = \frac{A}{A+B} = \frac{N}{8} : \left(\frac{N}{8} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{A}{2^{n+1}}\cdot(int)\frac{n}{L}\right) = \frac{7}{8}$; $p(B) = \frac{B}{A+B} = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A}{2^{n+1}}\cdot(int)\frac{n}{L}\right) : \left(\frac{N}{8} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{A}{2^{n+1}}\cdot(int)\frac{n}{L}\right) = \frac{1}{8}$. Интересно, что: *p(B)=f(A); B=f(A)* - зависят от А.

Законы симметрии нарушаются при введении новых взаимодействий. При расчётах численностей встреч различных шаблонов в потоковой теории часто используется свойство симметрии, численность разных симметричных шаблонов принималась в рассуждениях одинаковой. Например: численность «011» и «110» была равна, но шаблоны искали по правилам поиска R_0 , безотносительно к другим, третьим шаблонам. При образовании конкурирующих пар: «011»; «111» и «110»; «111», взаимодействие независимых шаблонов «011» и «110» с новым шаблоном «111» меняет их численное равенство. После введения нового взаимодействующего шаблона «111», число шаблонов «011» по R_0 сохранилось (2500390), но оно перестало быть динамически равно числу шаблонов «110», которое теперь стало равняться 1427693.

Формально можно констатировать, что законы симметрии нарушаются при введении новых взаимодействий.

<u>*Группирование шаблонов.*</u> При работе с группами шаблонов подмечено интересное явление: *группирование численностей шаблонов в зависимости от чисел внутренних инверсий.* Численности найденных шаблонов с одинаковым количеством инверсий внутри и одинаковой длиной n, при поиске каждого из шаблонов отдельно от других по правилам R_1, динамически равны.

В таблице 1 видно, что шаблоны Пенни разбиты на три группы. Каждая группа обладает своей численностью (расчёты численностей даны выше). Но у шаблонов каждой группы ещё и одинаковое число инверсий. Инверсия – это неравенство значений двух соседних элов (элементарных событий). В каждом из четырёх шаблонах столбца 1 одна инверсия. У шаблонов 2-го столбца нет инверсий (ноль). В шаблонах 3-го, по две инверсии.

Число групп шаблонов с одинаковым количеством инверсий зависит от длины шаблона n и равно n (инверсий: от 0, до n - 1). Число шаблонов $I(i,n)$ в каждой группе рассчитывается по ф. 14 [7]:

$$I(n,i\,) = \frac{2\cdot(n-1)!}{i!\cdot(n-1-i)!}\ ;\ где\ n = 1,2,3,\ldots;\ i \le n-1 \qquad Ф.\ 14$$

$I(n,i\,)$ – число разных шаблонов, содержащих внутри себя по i инверсии; n –длина слова; i – число инверсий внутри шаблона.

Для длины шаблона в два эла (n=2) группирование числа встреч шаблонов в зависимости от числа инверсий в шаблоне соблюдается. Пример для п-ти из $N=2\cdot10^7$ бросков монеты. Нет инверсий: «00» - 3333533, «11» - 3333047. Одна инверсия: «01» - 5000056, «10» - 5000055.

Для длины шаблона в три эла (n=3) соблюдается, таблица 1.

Для длины шаблона в четыре эла (n=4) группирование числа встреч шаблонов в зависимости от числа инверсий в шаблоне соблюдается.

Для n = 4: *I(4; i = 0)* = 2; *I(4; i = 1)* = 6; *I(4; i = 2)* = 6; *I(4; i = 3)* = 2.

I_0 ={667642, 666146}; I_1 ={1249426, 1249616, 1250642, 1250642, 1249018, 1249427}; I_2 ={1112161, 1111083, 1112019, 1110842, 1110968, 1111387}; I_3 ={999917, 1000214}.

Рассмотрим группы шаблонов длиной в пять эл (n=5). Для длины шаблона в пять эл группирование числа встреч шаблонов в зависимости от числа инверсий в шаблоне не соблюдается.

По ф. 14: *I(5; 0)* = 2; *I(5; 1)* = 8; *I(5; 2)* = 12; *I(5; 3)* = 8; *I(5; 4)* = 2.

Шаблоны группы I (5; i=0): 321911, 322707.

Шаблоны группы I (5; i=1): 625487, 625487, 623998, 624684, 624383, 623778, 624580, 624383.

Из 12 шаблонов I (5; i=2) десять имеют одинаковую численность ± Δ: 588962, 589537, 588823, 588345, 588897, 588830, 587835, 588001, 589266, 587531. Но шаблон «11011» найден 526947 раза, шаблон «00100» найден 525 773 раза. Напомним, числа всех шаблонов рассчитываются по формулам потоковой теории [1, 2, 3, 4].

Группа I (5; i=3) разделилась поровну: «10100» - 624774, «11010» - 624910, «01011» - 625509, «00101» - 625373; «10110» - 556027, «10010» - 555163, «01001» - 554388, «01101» - 555199.

Численности шаблонов группы *I (5; i=4): 475924, 476100* .

Группу шаблонов длиной в один эл (n=1, «0», «1»), можно считать безинверсионной (*i=0*). По ф. 14: *I (n=1; i=0)* = 2. Равенство по числу найденных в п-ти шаблонов по числу инверсий соблюдается.

<u>Выводы</u>

Даны формулы количественного расчёта числа встреч игровых комбинаций (игра Пенни). Формулы для расчётов в игре Пенни выведены из формул распределений составных событий и цуг описывающих параметры потоковой последовательности [1, 2, 3, 5].

На примере правил (R_1) поиска комбинаций Пенни произведён расчёт их встреч в случайной бинарной п-ти. Расчитанные значения хорошо совпали с экспериментальными значениями.

При тестировании псевдослучайных последовательностей может быть добавлен новый частотный тест, основанный на вышеописанных расчётах (таблица 1, формулы 1 – 13).

Конкуренция шаблонов меняет число встреч шаблонов, относительно их числа встреч при независимом поиске.

Число встреч поискового шаблона в случайной последовательности определяется разновидностью правил поиска и учёта R_n. В правилах R_1 (игра Пенни) комбинация не выпадает, а, так сказать, выезжает побитно. Поэтому традиционная технология расчёта через деление п-ти событий на n серий (по три события в каждой серии), в ситуации с потоковой п-тью не отвечает реальности. Существует глубокое различие между традиционной статистической обработкой серий и математическим аппаратом для потоковой последовательности. Разбор отличий между расчётом вероятностных событий в потоковой последовательности [1, 2, 5] от традиционного расчёта вероятностей в n сериях (выборках) по k элементов в каждой требует отдельной публикации. То, что разница существует, убеждают парадокс Уолтера Пенни, таблица 1, формулы 1 – 13.

Для длин n шаблонов: 1, 2, 3, 4 – соблюдается объединение шаблонов в группы равной численности, по признаку равного числа инверсий в шаблонах. Начиная с длины шаблона n = 5, обнаружено нарушение строгого равенства численностей найденных шаблонов от числа инверсий в них.

Потоковая теория предоставляет математический аппарат для расчёта числа побед одного конкурирующего шаблона над другим, числа встреч поискового шаблона в потоковой последовательности, вероятности побед одного шаблона над другим (парадокс Уолтера Пенни).

Литература

1. *Филатов О. В., Филатов И. О., Макеева Л. Л. и др*. «Потоковая теория: из сайта в книгу». Москва, «Век информации», 2014. С. 200.
2. *Филатов О. В., Филатов И. О*. «Закономерность в выпадении монет – закон потоковой последовательности». Германия, Издательский Дом: LAPLAMBERT Academic Publishing, 2015, с. 268.
3. *Филатов О. В., Филатов И. О*. статья «О закономерностях структуры бинарной последовательности», «Журнал научных публикаций аспирантов и докторантов», № 5, 2014.
4. Статья «О закономерностях структуры бинарной последовательности (продолжение)», «Журнал научных публикаций аспирантов и докторантов», № 6, 2014.
5. *Филатов О. В*. статья «Теорема «О амплитудно-частотной характеристике идеальной бинарной случайной последовательности», «Проблемы современной науки и образования», № 1 (31), 2015 г.
6. Интернет ресурс «Википедия», https://ru.wikipedia.org, запрос: «Игра Пенни», 27.09.2015 г.
7. *Филатов О. В*. статья «Числовая оценка Колмогоровской сложности. Определение вероятности через смену событий», «Проблемы современной науки и образования», № 8 (38), 2015 г.