# К методу спуска Ферма
## Кочкарев Б. С.

*Кочкарев Баграм Сибгатуллович / Kochkarev Bagram Sibgatullovich – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра высшей математики и математического моделирования, институт математики и механики имени Н. И. Лобачевского, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань*

***Аннотация:*** *вводится понятие класса бинарных математических утверждений от натурального параметра. Уточняется аксиоматика натуральных чисел Пеано добавлением аксиомы спуска, которая является алгебраической интерпретацией так называемого метода спуска Ферма. С использованием этой аксиомы решается ряд открытых в теории чисел проблем, возраст некоторых из которых достигает более 2500 лет.*

***Abstract:*** *introduces the concept of a class of binary mathematical statements from the natural setting. Refined axiomatic Peano natural numbers by adding the axiom of descent, wich is the algebraic interpretation of the so-called method of descent Fermat. With the use of this axiom is solved a number of open problems in the theory of numbers, the age of some of them reaches more than 2500 years.*

***Ключевые слова:*** *совершенные числа, числа Мерсенна, избыточные числа, дефектные числа,слегка дефектные числа,слегка избыточные числа.*

***Keywords:*** *perfect numbers, Mersenne prime, excess numbers, defect numbers, slight defect numbers, slightly excessive numbers.*

Определение 1. Математическое утверждение $A_n$, зависящее от натурального параметра $n$, назовем бинарным, если для любого значения $n=\alpha$ $A_\alpha$ имеет одно из двух значений: истина или ложь.

В отличие от бинарных утверждений в математике имеются утверждения $A_n$, также зависящие от натурального параметра $n$, которые для любого значения $n=\alpha$ имеют значения некоторой функции $f(n)$ от натурального аргумента. В аксиоматике Пеано для доказательства утверждения $A_n = f(n)$ обычно пользуются аксиомой индукции [1, 14]: Пусть $M \subseteq N$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $1 \in M$ (другими словами, $M$ содержит элемент, который непосредственно не следует ни за каким натуральным числом);

2) для любого числа $n$, если $n \in M$, то $n' \in M$. Тогда $M$ совпадает с $N$.

В случае бинарных утверждений $A_n$ Ферма придумал [2, 70] так называемый метод спуска, с помощью которого доказал, что класс диофантовых уравнений $u^n + v^n = w^n$ для $n \geq 4$ не имеет решений в кольце целых чисел.

В работе [3] мы доказали, что класс диофантовых уравнений $u^n + v^n = w^n, n \geq 3$ не имеет решений не только в кольце целых чисел, но и в поле рациональных чисел. Дальнейшие исследования показали, что диофантовы уравнения $u^3 + v^3 = w^3$ и $u^4 + v^4 = w^4$ имеют решения в поле комплексных чисел, а класс диофантовых уравнений $u^n + v^n = w^n, n \geq 5$ вообще не разрешим. Получение указанных результатов удалось сведением класса диофантовых уравнений к классу алгебраических уравнений. Метод доказательства Великой гипотезы Ферма позволил также получить все решения известного диофантова уравнения $u^2 + v^2 = w^2$ не только в кольце целых чисел, но и решения в поле действительных чисел [4].

Метод спуска, использованный Ферма для доказательства бинарного утверждения, что вышеприведенный класс диофантовых уравнений не имеет решений в целых числах, целесообразно сформулировать в виде аксиомы спуска: пусть $A_n$ - бинарное математическое утверждение, зависящее от натурального параметра $n$ такое, что 1) существует алгоритм, который для любого значения $n$ дает ответ на вопрос «утверждение $A_n$ истинно или ложно»; 2) для значений параметра $n_1, n_2, ..., n_k$ $A_{n_1}, A_{n_2}, ..., A_{n_k}$ истинны, а для любого $n_{k+1} > n_k$ $A_{n_{k+1}}$ ложно. Тогда утверждение $A_n$ истинно для бесконечного множества значений $n$.

Среди наиболее значимых для пифагорийцев натуральных чисел были так называемые «совершенные» числа [5, 26]. По мнению Пифагора [5, 27], совершенство числа зависит от его делителей. Если сумма делителей числа больше самого числа, то такое число называется «избыточным». С другой стороны, если сумма делителей числа меньше самого числа, то такое число называется «дефектным». Суммируя сказанное, введем определение.

Определение 2. (Пифагор) Натуральное число $n$ называется совершенным, если $\sum_{d_i \vdots n} d_i = n$, где $d_i \neq n$ - делители числа $n$.

Например, число 6 является первым совершенным числом. Следующее совершенное число равно 28. Третье совершенное число в натуральном ряде чисел 496.

Одно из открытий Пифагора [5, 28] состояло в том, что совершенство чисел тесно связано с «двоичностью». Все степени числа 2 чуть-чуть «не достают» до того, чтобы стать совершенными, так как сумма их делителей всегда на единицу меньше самого числа. Иначе говоря, все степени двойки слегка дефективны.

Двумя столетиями спустя [5, 28] Евклид открыл, что совершенные числа всегда кратны двум числам, одно из которых равно степени числа 2, а другое на единицу меньше следующей степени числа 2, т. е. совершенное число представимо в виде $2^k(2^{k+1}-1)$.

В XVIII веке Эйлер доказал [6, 318], что формула Евклида исчерпывает все множество четных совершенных чисел. С использованием аксиомы спуска мы показываем, что формула Евклида исчерпывает все множество совершенных чисел.

Теорема 1. Натуральное число $2^k(2^{k+1}-1), k \geq 1$ совершенно тогда и только тогда, если $2^{k+1}-1$ является простым числом.

Доказательство.

1. Действительно, пусть $2^{k+1}-1$ - простое число. Тогда делителями числа $2^k$ являются числа $1,2,2^2,...,2^k$, а делителями $d_i$ числа $n = 2^k(2^{k+1}-1), d_i \neq n,$ являются $1,2,2^2,...,2^k,2^{k+1}-1,2(2^{k+1}-1),2^2(2^{k+1}-1),...,2^{k-1}(2^{k+1}-1)$. В этом случае

$$\sum_{n \vdots d_i} d_i = 1+2+2^2+...+2^k+(2^{k+1}-1)(1+2+2^2+...+2^{k-1}) = n$$

2. Пусть теперь $2^{k+1}-1 = k_1 k_2, k_i \geq 3, i = \overline{1,2}$, т. е. является составным числом. Тогда, очевидно,

$$\sum_{n \vdots d_i} d_i \geq 2^{k+1}-1+k_1(2^{k+1}-1)+k_2(2^{k+1}-1)+k_1k_2(2^k-1) = k_1k_2 2^k + k_1(2^{k+1}-1)+k_2(2^{k+1}-1) > n,$$

3. Все нечетные числа не являются совершенными. Докажем с использованием аксиомы спуска. 1. $1$, очевидно, не является совершенным числом; 2. Предположим, $3,5,...,2n-1$ не являются совершенными числами, а $2n+1$ является совершенным. Тогда по аксиоме спуска $2n-1$ также является совершенным, что противоречит индуктивному предположению. Полученное противоречие окончательно ставит точку на доказательстве теоремы. Пункты 1 и 2 в доказательстве теоремы несколько отличаются от доказательства теоремы 315 [6, 318].

Таким образом, совершенство числа $2^k(2^{k+1}-1)$ зависит от того, простое или нет нечетное число $2^{k+1}-1$. Известно [6, 37], что простые числа вида $2^n-1$ в литературе называются числами Мерсенна, современника и корреспондента П. Ферма [2, 69]. Легко убедиться, что число $2^n-1$ может быть как простым, так и составным. Например, $2^2-1$ - простое, а $2^{11}-1 = 2047$ - составное. Известно [6, 35], что число $2^n-1$ может быть простым числом, только если само $n$ простое. Известно также [6, 37] (Критерий Люка), что $2^p-1$ при простом $p$ будет числом Мерсенна тогда и только тогда, если $s_{p-1} \equiv 0(\mathrm{mod}\, p)$, где $s_1, s_2, ..., s_k, ...$ - последовательность с $s_1 = 4, s_k = s^2{}_{k-1} - 2$.

Теорема 2. Множество чисел Мерсенна бесконечно.

Доказательство. Предположим, что чисел Мерсенна конечное число, т. е $2^{n_i}-1$ простые числа для $n_1 = 2, n_2 = 3, n_3 = 5, ..., n_k$, а для любого $n_{k+1} > n_k$ число $2^{n_{k+1}}-1$ является составным. Тогда по аксиоме спуска число $2^{n_k}-1$ также было бы составным, что противоречит индуктивному предположению. Полученное противоречие доказывает теорему.

Из доказанной теоремы вытекает следствие.

Следствие 1. Множество совершенных чисел бесконечно.

Доказательство. Действительно, согласно теореме 1 для любого числа $2^{n_i}-1$ Мерсенна натуральное число $2^{n_i-1}(2^{n_i}-1)$ является совершенным.

Следствие 2. Последовательность чисел $2^n-1$, где $n = 1,2,3,...$ содержит бесконечное множество простых чисел.

Последовательность чисел, указанная в следствии 2, в отличие от арифметической прогрессии теоремы 337 Дирихле [6, 356], обладает тем свойством, что расстояния между соседними членами увеличиваются и стремятся к бесконечности.

Теорема 3. (Гипотеза Л. Эйлера) Каждое четное число (начиная с 4) может быть представлено в виде суммы двух простых чисел.

Доказательство. Докажем по индукции с использованием аксиомы спуска. 1. $4 = 2 + 2$ 2. Предположим $6,8,10,...2n$ представляются в виде суммы двух простых чисел, а $2n + 2$ не представляется. Тогда по аксиоме спуска $2n$ также не представляется в виде суммы двух простых чисел, что противоречит индуктивному предположению. Полученное противоречие доказывает утверждение.

Следствие. (Л. Эйлер) Каждое нечетное число (начиная с 7) может быть представлено в виде суммы трех простых чисел.

Хотя древние греки знали [5, 28] множество слегка дефектных чисел (т. е. чисел, сумма делителей которых на единицу меньше самого числа), им не удалось найти слегка избыточное число (т. е. число, сумма делителей которого на единицу больше самого числа). Они не сумели также доказать, что таких чисел не существует. Такого рода загадки интриговали пифагорийское братство [5, 29], и спустя две с половиной тысячи лет математики все еще не могут доказать, что слегка избыточные числа не существуют.

Теорема 4. Слегка избыточных чисел не существует.

Доказательство проводится аналогично доказательству других бинарных утверждений по индукции с использованием аксиомы спуска.

## *Литература*


1. *Ларин С. В.* Числовые системы, Москва, ACADEMIA, 2001, с. 160.
2. *Самин Д. К.* Сто великих ученых, Москва, «ВЕЧЕ», 2001, с. 592.
3. *Кочкарев Б. С.* Об одном классе алгебраических уравнений, не имеющих рациональных решений. Проблемы современной науки и образования, № 4 (22), 2014, с. 8-10.
4. *Кочкарев Б. С.* Сведение одного диофантова уравнения к классу алгебраических уравнений от двух натуральных параметров, Проблемы современной науки и образования, № 7 (37), 2015, с. 6-7.
5. *Сингх С.* Великая теорема Ферма, МЦНМО, 2000, с. 288.
6. *Бухштаб А. А.* Теория чисел, Изд. «ПРОСВЕЩЕНИЕ», Москва, 1966, с. 384.