ПРЯМОЕ АДАПТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ С ЭТАЛОННОЙ МОДЕЛЬЮ

Шлопак А.А.

Шлопак Александр Анфирович - кандидат технических наук, доцент,
кафедра «Системы автоматического управления»
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана»
г. Мытищи

Аннотация: *в статье рассматривается прямое адаптивное управление с эталонной моделью для нелинейных систем с согласованной неопределенностью, представимой в линейно-параметрическом виде через известный вектор базисных функций. Для объекта и эталонной модели сформулированы условия согласуемости в терминах вложения столбцовых пространств. Построен адаптивный закон управления; для ошибок параметров выведены законы адаптации методом Ляпунова. Показано, что производная выбранной функции Ляпунова отрицательно полуопределена; доказывается асимптотическая сходимость ошибки слежения к нулю при ограниченных сигналах, при этом параметры адаптации остаются ограниченными и в полном фазовом пространстве асимптотическая устойчивость не гарантируется.*
Ключевые слова: *адаптивная, система, метод, Ляпунов.*

DIRECT ADAPTIVE CONTROL WITH A REFERENCE MODEL

Shlopak A.A.

Shlopak Alexander Anfirovich – PhD in Engineering Sciences, Associate Professor
DEPARTMENT «AUTOMATIC CONTROL SYSTEMS»
MYTISHCHI BRANCH OF BAUMAN MOSCOW STATE TECHNICAL UNIVERSITY,
MYTISHCHI

Abstract: *The paper considers direct model reference adaptive control for nonlinear systems with matched uncertainty represented in a linearly parameterized form via a known vector of basis functions. For the plant and the reference model, matching conditions are formulated in terms of inclusion of column spaces. An adaptive control law is developed; Lyapunov-based adaptation laws are derived for the parameter estimation errors. It is shown that the derivative of the chosen Lyapunov function is negative semidefinite. Asymptotic convergence of the tracking error to zero is proven for bounded signals, while the adaptive parameters remain bounded; however, asymptotic stability in the full state space is not guaranteed.*
Keywords: *adaptive, system, method, Lyapunov.*

УДК 681.513.66

Существует целый ряд методов синтеза алгоритмов адаптации параметров [3], [4]. В [1] рассмотрен синтез адаптивных систем методом функций Ляпунова для линейных объектов. В данной статье исследуется нелинейная система $MIMO$ с согласованной неопределенностью.

$$\dot{x} = Ax + B\left[u + f\left(x\right)\right], \qquad (1)$$

где $x\left(t\right) \in \mathbb{R}^{n}$ - вектор состояния,

$u\left(t\right) \in \mathbb{R}^{m}$ - вектор управления,

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ - постоянная матрица, состоящая из неизвестных коэффициентов,

$B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ - постоянная матрица, состоящая из неизвестных коэффициентов,

$f\left(x\right) \in \mathbb{R}^{m}$ - функция, которая может быть линейно параметризована $f\left(x\right) = \Theta^{*T}\Phi\left(x\right),$

где $\Theta^{*} \in \mathbb{R}^{l \times m}$ - постоянная неизвестная матрица,

$\Phi\left(x\right) \in \mathbb{R}^{l}$ - известная вектор функция, состоящая из базисных функций.

Предполагается, что пара $\left(A, B\right)$ управляема. Управляемость необходима, чтобы быть уверенными, что управление $u\left(t\right)$ имеет доступ к пространству состояния для стабилизации неустойчивых режимов объекта. Управляемость можно проверить по рангу матрицы управляемости C: $C = \left[B \quad AB \quad A^{2}B \quad \ldots \quad A^{n-1}B\right].$ Пара $\left(A, B\right)$ управляема, если $rank\left(C\right) = n.$

Эталонная модель имеет вид

$$\dot{y} = A_0 y + B_0 g, \qquad (2)$$

где $y(t) \in \mathbb{R}^n$ - вектор состояния модели,

$A_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ - заданная Гурвицева матрица,

$B_0 \in \mathbb{R}^{n \times q}$ - заданная матрица.

Предположим, что существуют идеальные матрицы коэффициентов K_x^* и K_g^*, которые обеспечивают соответствие динамики объекта и модели. Определим оптимальное управление, которое реализует $x(t) \to y(t)$:

$$u^* = K_x^* x + K_g^* g - \Theta^{*T} \Phi(x). \qquad (3)$$

Подставляя (3) выражение в уравнение объекта (1), получим:

$$\dot{x} = \left(A + BK_x^*\right) x + BK_g^* g \qquad (4)$$

Сравнивая (4) с эталонной моделью (2), получаем оптимальные коэффициенты из выражений:

$$\begin{aligned} A + BK_x^* &= A_0, \\ BK_g^* &= B_0. \end{aligned} \qquad (5)$$

Чтобы матрицы K_x^*, K_g^* существовали, необходимо выполнение условия согласуемости модели с объектом:

$$\mathrm{Im}(A_0 - A) \subseteq \mathrm{Im}(B),$$

$$\mathrm{Im}(B_0) \subseteq \mathrm{Im}(B).$$

Здесь $\mathrm{Im}(B) = \left\{Bv:\ v \in \mathbb{R}^m\right\} \subseteq \mathbb{R}^n$ - столбцовое пространство матрицы B:

$\mathrm{Im}(B) = span\{b_1, b_2, ..., b_m\}$, где $b_1, b_2, ..., b_m$ - столбцы B.

Если B имеет полный столбцовый ранг, т.е. $rank(B) = m$ и условия согласуемости выполнены, то решение (5) единственное и записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} K_x^* &= B^{\dagger}\left(A_0 - A\right), \\ K_g^* &= B^{\dagger} B_0, \end{aligned} \qquad (6)$$

где при полном столбцовом ранге имеем $B^{\dagger} = \left(B^T B\right)^{-1} B^T$.

Если B квадратная матрица и невырождена, то условие соответствия модели выполнимы для любых A_0, B_0, и (6) имеет вид:

$$K_x^* = B^{-1}\left(A_0 - A\right),$$

$$K_g^* = B^{-1} B_0.$$

$$u = K_x(t) x + K_g(t) g - \Theta^T \Phi(x), \qquad (7)$$

где $K_x(t) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, K_g(t) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^q, \Theta(t) \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m$ оценки K_x^*, K_g^* и Θ^* соответственно.

Обозначим ошибки оценки

$$\begin{aligned} \tilde{K}_x(t) &= K_x(t) - K_x^*, \\ \tilde{K}_g(t) &= K_g(t) - K_g^*, \\ \tilde{\Theta}(t) &= \Theta(t) - \Theta^*. \end{aligned} \qquad (8)$$

Подставляя (7), (8) в уравнение объекта (1), получим:

$$\dot{x} = \left(\underbrace{A + BK_x^*}_{A_0} + B\tilde{K}_x\right) x + \left(\underbrace{BK_g^*}_{B_0} + B\tilde{K}_g\right) g - B\tilde{\Theta}^T \Phi(x.)$$

Ошибка сигнального рассогласования объекта и модели

$$\dot{e} = \dot{y} - \dot{x} = A_0 e - B\tilde{K}_x x - B\tilde{K}_g g + B\tilde{\Theta}^T \Phi(x). \qquad (9)$$

Для определения законов адаптации выберем функцию Ляпунова в виде

$$V\left(e,\tilde{K}_x,\tilde{K}_g,\tilde{\Theta}\right)=\frac{1}{2}e^TPe+\frac{1}{2}tr\left(\tilde{K}_x\Gamma_x^{-1}\tilde{K}_x^T\right)+\frac{1}{2}tr\left(\tilde{K}_g\Gamma_g^{-1}\tilde{K}_g^T\right)+\frac{1}{2}tr\left(\tilde{\Theta}^T\Gamma_\Theta^{-1}\tilde{\Theta}\right).$$

Полная производная функции Ляпунова по времени равна в силу дифференциального уравнения по ошибке сигнального рассогласования (9)

$$\dot{V}\left(e,\tilde{K}_x,\tilde{K}_g,\tilde{\Theta}\right)=-\frac{1}{2}e^TQe+e^TP\left[-B\tilde{K}_xx-B\tilde{K}_gg+B\tilde{\Theta}^T\Phi\left(x\right)\right]+tr\left(\tilde{K}_x\Gamma_x^{-1}\dot{\tilde{K}}_x^T\right)$$

$$+tr\left(\tilde{K}_g\Gamma_g^{-1}\dot{\tilde{K}}_g^T\right)+tr\left(\tilde{\Theta}^T\Gamma_\Theta^{-1}\dot{\tilde{\Theta}}\right).$$

Здесь $A_0^TP+PA_0=-Q,\quad Q=Q^T>0,\ P=P^T>0,\ \Gamma_x\in\mathbb{R}^{n\times n},\ \Gamma_g\in\mathbb{R}^{q\times q},\ \Gamma_\Theta\in\mathbb{R}^{l\times l}.$

или

$$\dot{V}\left(e,\tilde{K}_x,\tilde{K}_g,\tilde{\Theta}\right)=-\frac{1}{2}e^TQe+tr\left(\tilde{K}_x\left[-xe^TPB+\Gamma_x^{-1}\dot{\tilde{K}}_x^T\right]\right)+tr\left(\tilde{K}_g\left[-ge^TPB+\Gamma_g^{-1}\dot{\tilde{K}}_g^T\right]\right)$$

$$+tr\left(\tilde{\Theta}^T\left[\Phi\left(x\right)e^TPB+\Gamma_\Theta^{-1}\dot{\tilde{\Theta}}\right]\right)$$

Таким образом, законы адаптации имеют вид

$$\dot{\tilde{K}}_x^T=\Gamma_xxe^TPB,$$

$$\dot{\tilde{K}}_g^T=\Gamma_gge^TPB,$$

$$\dot{\tilde{\Theta}}=-\Gamma_\Theta\Phi\left(x\right)e^TPB.$$

В конце адаптации имеем

$$\dot{V}\left(e,\tilde{K}_x,\tilde{K}_g,\tilde{\Theta}\right)=-\frac{1}{2}e^TQe\le0,$$

Функция Ляпунова – положительно определенная квадратичная форма по всем переменным:

$V:\mathbb{R}^{n+\dots}\to\mathbb{R},\ V\left(0\right)=0,\ V\left(\xi\right)>0\ \ \forall\xi\neq0,$ где $\xi=\left(e,\tilde{K}_x,\tilde{K}_g,\tilde{\Theta}\right).$

Так как $V>0$ и $\dot{V}\le0,$ то V невозрастающая и ограничена снизу, поэтому

$\lim\limits_{t\to\infty}V=V_\infty$ существует и конечен.

Следовательно, $\int\limits_0^\infty-\dot{V}\left(\tau\right)d\tau=V\left(0\right)-V_\infty<\infty$ и $\int\limits_0^\infty e\left(\tau\right)^TQe\left(\tau\right)d\tau<\infty.$

Покажем, что $\dot{V}$ равномерно непрерывна. В этом случае по лемме Барбалата [2] $\dot{V}\to0$ и поэтому $e\to0.$ Для этого достаточно показать, что $\ddot{V}$ ограничена.

Имеем: $\ddot{V}=-e^TQ\dot{e}.$

- из $V\le V\left(0\right)$ и положительной определенности $V:\ e,\ \tilde{K}_x,\ \tilde{K}_g,\ \Theta$ - ограничены.

- $g\left(t\right)$ - ограниченный задающий сигнал.

- $y\left(t\right)$ - ограничен в силу эталонной модели с гурвицевой матрицей A_0 и ограниченности $g\left(t\right).$

- $x\left(t\right)$ - ограничен в силу $x=y-e.$

- $\Phi\left(x\right)$ - ограничена в силу ограниченности $x\left(t\right).$

Поэтому в дифференциальном уравнении по ошибке правая часть состоит из ограниченных величин и потому $\dot{e}\left(t\right)$ ограничена.

Следовательно, $\ddot{V}$ ограничена и поэтому $\dot{V}$ равномерно непрерывна.

Таким образом, по ошибке синтезированная адаптивная система управления асимптотически устойчива, а в полном фазовом пространстве не является асимптотически устойчивой, т.к. $k_x,\ k_g$ и Θ только ограничены.

Список литературы / References

1. *Есаков В.А., Дудко В.Г., Шлопак А.А.* Синтез адаптивных систем методом функций Ляпунова.
2. Проблемы современной науки и образования 2018. № 12 (132), с. 47-50.

3. *Ким Д.П.* Теория автоматического управления: Учебник т.2.-М.:ФИЗМАТЛИТ, 2018.- 440 с.
4. Методы робастного, нейро-нечеткого и адаптивного управления: Учебник/под ред. Н.Д. Егупова.-М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002.-744 с.
5. *Карабутов Н.Н.* Адаптивная идентификация систем: Информационный синтез. – М.: КомКнига, 2006.– 384 с.