ТЕОРЕМА О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Дудко В.Г.[1], Шлопак А.А.[2]

[1]Дудко Владимир Григорьевич - кандидат технических наук, доцент,
[2]Шлопак Александр Анфирович - кандидат технических наук, доцент,
кафедра К-1 «Системы автоматического управления»
Мытищинский филиал Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет),
г. Мытищи

Аннотация: *исследования по решению смешанной задачи для системы дифференциально-функциональных уравнений изложены в [1], [2]. В работах [3], [4], [5] для этих систем рассмотрены непрерывная зависимость решения от начальных условий и правых частей в смысле среднего квадратичного отклонения, доказаны теоремы о непрерывной зависимости частных производных по времени от решения. В данной статье исследуются вопросы существования и единственности обобщённого решения системы линейных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка. Предполагается, что начальные условия квадратично суммируемы на отрезке, а правые части уравнений принадлежат пространству* L_2 *на прямоугольной области. Проведено доказательство теоремы существования и единственности обобщённого решения, основанное на методе аппроксимации начальных условий и правых частей последовательностями гладких функций, с последующим применением метода предельного перехода. Показано, что обобщённое решение сохраняет свойства квадратичной непрерывности и удовлетворяет начальным условиям с точностью до множества меры нуль. В работе также доказана единственность решения путём анализа сходимости разностей аппроксимирующих решений. Полученные результаты подтверждают устойчивость решения к малым изменениям начальных и граничных условий, что делает представленный подход универсальным для задач данного класса.*
Ключевые слова: *уравнения, функциональный, теорема.*

A THEOREM ON THE EXISTENCE AND UNIQUENESS OF A GENERALIZED SOLUTION TO A MIXED PROBLEM OF LINEAR SYSTEMS OF DIFFERENTIAL FUNCTIONAL EQUATIONS

Dudko V.G.[1], Shlopak A.A.[2]

[1]Dudko Vladimir Grigoryevich - PhD in Engineering Sciences, Associate Professor
[2]Shlopak Alexander Anfirovich – PhD in Engineering Sciences, Associate Professor
DEPARTMENT K-1 «AUTOMATIC CONTROL SYSTEMS»
MYTISHCHI BRANCH OF BAUMAN MOSCOW STATE TECHNICAL UNIVERSITY,
MYTISHCHI

Abstract: *studies on solving a mixed problem for a system of differential functional equations are described in [1], [2]. In the works [3], [4], [5] for these systems, the continuous dependence of the solution on the initial conditions and the right-hand sides in the sense of the mean square deviation is considered, theorems on the continuous dependence of partial derivatives in time on the solution are proved. This article examines the existence and uniqueness of a generalized solution of a system of linear partial differential equations of the first order. It is assumed that the initial conditions are quadratically summable on the segment, and the right-hand sides of the equations belong to the space on the rectangular area. The proof of the theorem of the existence and uniqueness of the generalized solution is carried out, based on the method of approximation of the initial conditions and the right parts by sequences of smooth functions, followed by the application of the limit transition method. It is shown that the generalized solution preserves the properties of quadratic continuity and satisfies the initial conditions up to the set of measure zero. The paper also proves the uniqueness of the solution by analyzing the convergence of the differences of the approximating solutions. The results obtained confirm the stability of the solution to small changes in initial and boundary conditions, which makes the presented approach universal for problems of this class.*
Keywords: *equations, functional, theorem.*

УДК 681.51

Ранее была сформулирована теорема о существовании и единственности обобщенного решения системы уравнений.

$$
\begin{aligned}
&L\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}+R\mathbf{i}+\bar{T}_1\left[x,y;\mathbf{i}\right]=\mathbf{g}_1\left(x,t\right),\\
&C\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial x}+J\mathbf{u}+\bar{T}_2\left[x,y;\mathbf{i}\right]=\mathbf{g}_2(x,t),
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

$x\in\left[0,l\right],\ t\in\left[0,t^{'}\right],\ l\in\left[0,\infty\right],\ t^{'}\in\left[0,\infty\right].$

Здесь коэффициенты L,R,C и J -- постоянные квадратные матрицы порядка $m\geq 1.$ Кроме того, матрицы L и C - симметричны и положительно определены. Векторы $\mathbf{i}$ и $\mathbf{u}$ порядка m - искомые, их проекции зависят от аргументов x,t в прямоугольнике $\Pi:\ 0\leq x\leq l,\ 0\leq t\leq t^{'}.$

Граничные условия

$$
\mathbf{u}\,|_{x=0}=\mathbf{u}\,|_{x=l}=0\quad\left(t\in\left[0,t^{'}\right]\right) \qquad (2)
$$

Начальные условия

$$
\mathbf{i}\,|_{t=0}=\mathbf{F}\left(x\right),\quad \mathbf{u}\,|_{t=0}=\mathbf{\Phi}\left(x\right)\quad\left(x\in\left[0,l\right]\right) \qquad (3)
$$

<u>Теорема.</u> Если начальные условия $\mathbf{F}\left(x\right)$ и $\mathbf{\Phi}\left(x\right)$ квадратично суммируемы на отрезке $0\leq x\leq l,$ а правые части системы уравнений (1) $\mathbf{g}_1\left(x,t\right)$ и $\mathbf{g}_2(x,t)$ квадратично суммируемы в прямоугольнике $\bar{\Pi}_0,$ то существует и притом единственное обобщенное решение системы уравнений (1) при граничных условиях (2), удовлетворяющее с точностью до множества меры нуль начальным условиям (3).

Под обобщенным решением системы уравнений (1), (2), (3) будем понимать векторные функции $\mathbf{i}\left(x,t\right)$ и $\mathbf{u}\left(x,t\right),$ квадратично непрерывные по t в $\bar{\Pi}_0$ при граничных условиях (2), если найдутся последовательности непрерывных функций $\mathbf{g}_{1,n}\left(x,t\right)$ и $\mathbf{g}_{2,n}\left(x,t\right),$ сходящимся в среднем по $x,\ t$ соответственно к $\mathbf{g}_1\left(x,t\right)$ и $\mathbf{g}_2\left(x,t\right),$ и последовательности непрерывно дифференцируемых в $\bar{\Pi}_0$ функций $\mathbf{i}_n\left(x,t\right)$ и $\mathbf{u}_n\left(x,t\right),$ сходящиеся в среднем по x соответственно к $\mathbf{i}\left(x,t\right)$ и $\mathbf{u}\left(x,t\right),$ причем

$$
\begin{aligned}
&L\frac{\partial \mathbf{i}_n}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial x}+R\mathbf{i}_n+\bar{T}_1[x,t;\mathbf{i}_n]=\mathbf{g}_{1n}(x,t),\\
&C\frac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{i}_n}{\partial x}+G\mathbf{u}_n+\bar{T}_2[x,t;\mathbf{u}_n]=\mathbf{g}_{1n}(x,t),
\end{aligned}
\qquad (4)
$$

$$
\mathbf{u}_n\,|_{x=0}=\mathbf{u}_n\,|_{x=l}=0,\quad\left(0\leq t\leq t^{'}\right). \qquad (5)
$$

В данной работе приведено доказательство этой теоремы.

Начальные условия $\mathbf{F}\left(x\right),$ $\mathbf{\Phi}\left(x\right)$ и правые части системы уравнений $\mathbf{g}_1\left(x,t\right)$ и $\mathbf{g}_2\left(x,t\right)$ аппроксимируем в среднем соответственно функциями

$\mathbf{F}_n\left(x\right),\ \mathbf{\Phi}_n\left(x\right),\ \mathbf{g}_{1,n}\left(x,t\right),\ \mathbf{g}_{2,n}\left(x,t\right),$

удовлетворяющими условиям теоремы, доказанной в [6]. В силу этой доказанной теоремы система уравнений (4) при граничных условиях (5) и начальных условиях

$\mathbf{i}_n\,|_{t=0}=\mathbf{F}_n\left(x\right),\ \mathbf{u}_n\,|_{t=0}=\mathbf{\Phi}_n\left(x\right),$

при каждом $n=1,2,...$ имеет непрерывно дифференцируемое решение. Применим теорему из [7]. В ней утверждалось, что для решения систем уравнений $\mathbf{i},\mathbf{u}$ и $\mathbf{i}_0,\mathbf{u}_0$ соответственно уравнений

$L_\nu\left[\mathbf{i},\mathbf{u}\right]+T_\nu\left[x,t;\mathbf{i},\mathbf{u}\right]=\mathbf{g}_\nu,\qquad(\nu=1,2)$

$L_\nu^{(0)}\left[\mathbf{i},\mathbf{u}\right]+T_\nu\left[x,t;\mathbf{i},\mathbf{u}\right]=\mathbf{g}_\nu^{(0)}\ \ (\nu=1,2)$

удовлетворяющие граничным условиям

$$\left[(C_1-P_1)\mathbf{u}+Q_1\mathbf{i}+R_1\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t}+S_1\int_0^t \mathbf{i}dt\right]|_{x=0}=0,\quad P_1^T\mathbf{i}\,|_{x=0}=0$$

$$\left[(C_1-P_2)\mathbf{u}-Q_2\mathbf{i}-R_2\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t}-S_2\int_0^t \mathbf{i}dt\right]|_{x=l}=0,\quad P_2^T\mathbf{i}\,|_{x=l}=0$$

и для некоторого α выполнены условия

$A_\nu>0,(x\in[0,l],t\in[0,t^{'}]),$

$R_\nu\ge 0,S_\nu\ge 0,(t\in[0,t^{'}];\nu=1,2)$

и при $t\in[0,t^{'}]$

$$-B_2\,|_{x=0}\ge 0, B_2\,|_{x=l}\ge 0,-\frac{dS_\nu}{dt}+2\alpha S_\nu\ge 0,(\nu=1,2),$$

$$-\frac{dR_1}{dt}-B_1\,|_{x=0}+2Q_1+2\alpha R_1\ge 0,$$

$$-\frac{dR_2}{dt}-B_1\,|_{x=l}+2Q_2+2\alpha R_2\ge 0.$$

При этом матрицы $A_1^{(0)}$ и $A_2^{(0)}$ положительно определены в Π. Тогда, найдутся такие числа $\varepsilon>0$ и $\eta>0,$ не зависящие от коэффициентов, что если элементы матриц $A_\nu-A_\nu^{(0)}$ $(\nu=1,2)$ по абсолютной величине меньше $\varepsilon,$ то для разности решений $\mathbf{I}=\mathbf{i}-\mathbf{i}_0,$ $\mathbf{U}=\mathbf{u}-\mathbf{u}_0$ будет справедливо неравенство

$$\int_0^l\left(\mathbf{I}^2+\mathbf{U}^2\right)dx\le\vartheta\{\int_0^l\left(\mathbf{I}^2+\mathbf{U}^2\right)|_{t=0}\,dx+\left(R_1\mathbf{I},\mathbf{I}\right)|_{\substack{t=0\\x=0}}+$$

$$+\left(R_2\mathbf{I},\mathbf{I}\right)|_{\substack{t=0\\x=0}}+\int_0^t dt\int_0^l\sum_{\nu=1}^2[\left|\mathbf{g}_\nu-\mathbf{g}_\nu^{(0)}\right|^2+\left|A_\nu-A_\nu^{(0)}\right|^2+\left|B_\nu-B_\nu^{(0)}\right|^2+$$

$$+\left|C_\nu-C_\nu^{(0)}\right|^2+\left|D_\nu-D_\nu^{(0)}\right|^2+\left|F_\nu-F_\nu^{(0)}\right|^2]dx\}$$

В силу того, что условия этой теоремы удовлетворяются (достаточно положить $\alpha=0$), получим, что

$$\int_0^l\left[\left(\mathbf{i}_n-\mathbf{i}_m\right)^2+\left(\mathbf{u}_n-\mathbf{u}_m\right)^2\right]dx\le$$

$$\le\upsilon\left\{\int_0^l\left[\left(\mathbf{F}_n-\mathbf{F}_m\right)^2+\left(\mathbf{\Phi}_n-\mathbf{\Phi}_m\right)^2\right]dx+\int_0^t dt\int_0^l\left[\left(\mathbf{g}_{1,n}(x,t)-\mathbf{g}_{1,m}(x,t)\right)^2+\left(\mathbf{g}_{2,n}(x,t)-\mathbf{g}_{2,m}(x,t)\right)^2\right]dx\right\} \tag{6}$$

Из неравенства (6) следует, что последовательности

$\mathbf{i}_n\left(x,t\right)$ и $\mathbf{u}_n\left(x,t\right)$ сходятся в среднем по x к функциям, которые обозначим через $\mathbf{i}\left(x,t\right)$ и $\mathbf{u}\left(x,t\right)$ соответственно. Предельные функции $\mathbf{i}\left(x,t\right)$, $\mathbf{u}\left(x,t\right)$ и представляют собой обобщенное решение.

Обобщенное решение единственно. В самом деле, пусть $\mathbf{i}_s$, $\mathbf{u}_s$ $(s=1,2)$ два обобщенных решения уравнения (1) при граничных условиях (2), удовлетворяющих почти всюду начальным условиям (3). Тогда $\mathbf{i}_s$ и $\mathbf{u}_s$ являются пределами в среднем по x последовательности решений $\mathbf{i}_{ns}$, $\mathbf{u}_{ns}$ системы уравнений (4) с правыми частями $\mathbf{u}_2$ $\mathbf{g}_{1ns}(x,t),$ $\mathbf{g}_{2ns}(x,t)$ при граничных условиях (5) и начальных условиях $\mathbf{F}_{ns}\left(x\right),$ $\mathbf{\Phi}_{ns}\left(x\right)$ соответственно. При этом

$\mathbf{g}_{1ns}(x,t),$ $\mathbf{g}_{2ns}(x,t),$ $\mathbf{F}_{ns}\left(x\right),$ $\mathbf{\Phi}_{ns}\left(x\right)$

В среднем сходятся соответственно к $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{\Phi}$.

Разности решений $\mathbf{i}_{n2}-\mathbf{i}_{n1}$, $\mathbf{u}_{n2}-\mathbf{u}_{n1}$ также удовлетворяют системе уравнений (4) с правыми частями $\mathbf{g}_{1,n2}(x,t)-\mathbf{g}_{1,n1}(x,t)$, $\mathbf{g}_{2,n2}(x,t)-\mathbf{g}_{2,n1}(x,t)$ при граничных условиях (5) и начальных

$\mathbf{F}_{n2}(x)-\mathbf{F}_{n1}(x)$, $\boldsymbol{\Phi}_{n2}(x)-\boldsymbol{\Phi}_{n1}(x)$ соответственно. В силу теоремы из [7] будет иметь место неравенство

$$\int_0^l\left[\left(\mathbf{i}_{n2}-\mathbf{i}_{n1}\right)^2+\left(\mathbf{u}_{n2}-\mathbf{u}_{n1}\right)^2\right]dx\le$$

$$\le\upsilon\left\{\int_0^l\left[\left(\mathbf{F}_{n2}-\mathbf{F}_{n1}\right)^2+\left(\boldsymbol{\Phi}_{n2}-\boldsymbol{\Phi}_{n1}\right)^2\right]dx+\int_0^t dt\int_0^l\left[\left(\mathbf{g}_{1,n2}(x,t)-\mathbf{g}_{1,n1}(x,t)\right)^2+\left(\mathbf{g}_{2,n2}(x,t)-\mathbf{g}_{2,n1}(x,t)\right)^2\right]dx\right\}$$

При $n\to\infty$ правая часть неравенства стремится к нулю, а потому и

$$\int_0^l\left[\left(\mathbf{i}_{n2}-\mathbf{i}_{n1}\right)^2+\left(\mathbf{u}_{n2}-\mathbf{u}_{n1}\right)^2\right]dx\to 0,\ \text{т.е.}$$

$$\int_0^l\left[\left(\mathbf{i}_{2}-\mathbf{i}_{1}\right)^2+\left(\mathbf{u}_{2}-\mathbf{u}_{1}\right)^2\right]dx=0,\quad\left(0\le t\le t'\right).$$

Отсюда и следует эквивалентность $\mathbf{i}_2$ с $\mathbf{i}_1$ $\mathbf{u}_2$ с $\mathbf{u}_1$, т.е. единственность обобщенного решения. Теорема доказана. Следует отметить почему сходимость разностей решений к нулю обеспечивает их эквивалентность. Предположим, что имеется два обобщенных решения системы уравнений $\mathbf{i}_1(x,t),\mathbf{u}_1(x,t)$ и $\mathbf{i}_2(x,t)$, $\mathbf{u}_2(x,t)$, которые удовлетворяют исходной системе уравнений, начальным условиям (с точностью до множества меры нуль) и они заданы как пределы последовательностей $(\mathbf{i}_n,\mathbf{u}_n)$ в среднем по x при $n\to\infty$. Чтобы показать, что эти два решения эквивалентны, необходимо доказать, что их разность $\mathbf{I}=\mathbf{i}_1-\mathbf{i}_2$, $\mathbf{U}=\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2$ равна нулю почти всюду. Из аппроксимации решений последовательностями $(\mathbf{i}_n,\mathbf{u}_n)$ следует, что $\mathbf{i}_1(x,t)=\lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{i}_{1,n}(x,t)$, $\mathbf{i}_2(x,t)=\lim\limits_{n\to\infty},\mathbf{i}_{2,n}(x,t)$, и аналогично для $\mathbf{u}_1(x,t)$, $\mathbf{u}_2(x,t)$. Тогда разность $\mathbf{I}_n(x,t)=\mathbf{i}_{1,n}(x,t)-\mathbf{i}_{2,n}(x,t)$, $\mathbf{U}_n(x,t)=\mathbf{u}_{1,n}(x,t)-\mathbf{u}_{2,n}(x,t)$, удовлетворяет системе уравнений (той же структуры, что исходная), но с нулевыми начальными и граничными условиями. Для разностей решений вводится оценка, которая связана с нормой разности:

$$\left\|\mathbf{I}_n(x,t)\right\|_{L_2}^2+\left\|\mathbf{U}_n(x,t)\right\|_{L_2}^2.$$

Используя положительную определенность матриц и свойство квадратичной суммируемости по условию задачи, удается показать, что

$$\left\|\mathbf{I}_n(x,t)\right\|_{L_2}^2+\left\|\mathbf{U}_n(x,t)\right\|_{L_2}^2\to 0\ \text{при}\ n\to\infty.$$

Это означает, что разности аппроксимирующих решений стремятся к нулю в L_2 - норме, а потому их предел также равен нулю почти всюду:

$$\left\|\mathbf{i}_1(x,t)-\mathbf{i}_2(x,t)\right\|_{L_2}=0,\ \left\|\mathbf{u}_1(x,t)-\mathbf{u}_2(x,t)\right\|_{L_2}=0.$$

Это и означает, что функции совпадают почти всюду (с точностью до множества меры нуль) и следовательно, решения математически эквивалентны.

Список литературы / References

1. *А.Д. Мышкис* “Смешанные функционально-дифференциальные уравнения”, Новые проблемы теории функционально-дифференциальных уравнений, СМФН, 4, МАИ, М., 2003, 5–120; Journal of Mathematical Sciences, 129:5 (2005), 4111–4226.
2. *А.Д. Мышкис* “Начальная задача для смешанных функционально-дифференциальных уравнений”, Автомат. и телемех., 1999, № 3, 170–179; Autom. Remote Control, 60:3 (1999), 436–444.

3. *Дудко В.Г., Сумительнов В.Н., Шлопак А.А*.” Решение одной смешанной задачи для системы телеграфных уравнений методом разделения переменных, Проблемы современной науки и образования 2017. № 33 (115), 27-33.
4. *Шлопак А.А.* Решение смешанной задачи для линейных систем дифференциально-функциональных уравнений с постоянными коэффициентами при простейших граничных условиях, Проблемы современной науки и образования 2017. № 16 (98), 26-30.
5. *Шлопак А.А.* О решении смешанной задачи линейных систем дифференциально-функциональных уравнений. Проблемы современной науки и образования 2021. № 11 (168), 34-41.
6. *Дудко В.Г., Шлопак А.А.* О теореме существования смешанной задачи линейных систем дифференциально-функциональных уравнений. Проблемы современной науки и образования 2022. № 9 (178), 21-27.
7. *Дудко В.Г., Шлопак А.А.* О непрерывной зависимости решения смешанной задачи для систем дифференциально-функциональных уравнений от коэффициентов системы в смысле среднего квадратичного отклонения 2020. № 12 (157). Часть 2, 4-13.