ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО-ВОЗМУЩЕННОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ МАЛЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Омуров Т.Д.[1], Алиева А.Р.[2] Email: Omurov1791@scientifictext.ru

*[1]Омуров Таалайбек Дардаылович - доктор физико-математических наук, профессор,
кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений, факультет математики, информатики,
Кыргызский национальный университет им. Жусупа Баласагына;
[2]Алиева Айнур Рабатовна - старший научный сотрудник,
лаборатория прикладной математики и информатики,
Институт теоретической и прикладной математики Национальной академии наук Кыргызской Республики,
г. Бишкек, Кыргызская Республика*

Аннотация: *в области сингулярно-возмущенных задач уравнения с двумя и более малыми параметрами были исследованы в работах [6, 10] и др., причем вопросы устойчивости или условной устойчивости решения имеют важное значение в теории указанных задач. Например, в работе [10] исследованы уравнения с двумя параметрами, когда* $\rho^{-1}A_\tau = \varepsilon$ *- кинематический коэффициент «кажущейся» вязкости турбулентного течения, соответствующий коэффициенту кинематической вязкости* $\mu = \rho^{-1}\nu$ *ламинарного течения (* A_τ *- коэффициент турбулентного обмена). Поэтому, в данной работе изучается сингулярно-возмущенная задача с двумя малыми параметрами в весовом пространстве* $L_h^2(D)$*, когда задается априорная информация о входных данных в* $L^2(R^2)$.

Ключевые слова: *сингулярно-возмущённая задача, интегрируемая функция, вырожденная задача, малый параметр, единственное решение, интегральный оператор.*

THE CAUCHY PROBLEM FOR SINGULARLY PERTURBED INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH TWO SMALL PARAMETERS

Omurov T.D.[1], Alieva A.R.[2]

*[1]Taalaibek D. Omurov - Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
DEPARTMENT OF MATHEMATICAL ANALYSIS AND DIFFERENTIAL EQUATIONS, FACULTY OF MATHEMATICS, INFORMATICS,
KYRGYZ NATIONAL UNIVERSITY NAMED AFTER J. BALASAGYN;
[2]Alieva Ainur Rabatovna - Senior Researcher,
LABORATORY OF APPLIED MATHEMATICS AND INFORMATICS,
INSTITUTE OF THEORETICAL AND APPLIED MATHEMATICS OF THE KYRGYZ REPUBLIC NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES,
BISHKEK, REPUBLIC OF KYRGYZSTAN*

Abstract: *in the singularly perturbed problems equations with two or more small parameters were studied in [6, 10] and the others, stability issues and conditional stability of solutions are important in theory of these problems.*

For example, in [10] investigated the equation with two parameters when $\rho^{-1}A_\tau = \varepsilon$ *- kinematic-viscosity coefficient "apparent" of turbulent flow, corresponding to kinematic-viscosity coefficient* $\mu = \rho^{-1}\nu$ *of laminar flow (* A_τ *- turbulent exchange coefficient).*

Therefore, in this paper we study the singularly perturbed problem with two small parameters in the weighted space $L_h^2(D)$ *when given prior information of the input data in* $L^2(R^2)$.

Keywords: *singularly perturbed problems, integrable function, degenerate problem, small parameter, a unique solution, an integral operator.*

УДК 517.955

Введение

Известно, что существенные трудности, связанные с вопросами разрешимостью, возникают при исследовании нелинейных сингулярно-возмущенных задач в неограниченных областях с одним малым параметром, когда в этих задачах малость погранслойной функции нарушается не в начальной точке, а на отрезке, где $x = t, ((t,x) \in [0,T] \times R),$ а в случае $t \in R_+,$ то малость нарушается в области R_+, где $x = t$. Тем более, в случае $(t,x,y) \in D = [0,T] \times R^2$, еще труднее, в чем и заключается актуальность исследований данной работы. Аналогичные трудности возникают и в сингулярно-возмущенных задачах с двумя малыми параметрами [6,10] и более, когда независимые переменные допускают указанные условия, где доминируются интегро-дифференциальные уравнения в частных производных [3, 4, 5] и др.

В связи с этим, в настоящей статье изучается нелинейное сингулярно-возмущенное интегро-дифференциальное уравнение четвертого порядка с двумя малыми параметрами с условием Коши на основе метода работы [8], дающий разложения асимптотического характера, где содержатся функции типа погранслоя и линейный интегральный оператор с остаточной функцией. При этом излагаемый метод модифицирует метод классической погранслойной функции [1, 2, 4] с априорной информацией о входных данных в $L^2(R^2)$ [7].

Рассмотрим сингулярно-возмущенную задачу вида:

$$\varepsilon_1^2[u_{t^2x^2}+u_{tx^3}]-\varepsilon_2[\varepsilon_1^2(u_{tyx^2}+u_{yx^3})-u_{ty}-u_{yx}]=u_{t^2}+u_{tx}+f(t,x,y)+\lambda Ku, \qquad (1)$$

$$\begin{cases} u(0,x,y)=\vartheta(0,x,y)+b_0(x,y,\varepsilon_1,\varepsilon_2), \forall(x,y)\in R^2, \\ u_t(0,x,y)=\vartheta_t(0,x,y)-b_{0x}(x,y,\varepsilon_1,\varepsilon_2), \forall(x,y)\in R^2, \\ Ku\equiv\int\limits_{R^2}K(t,x,y,\tau_1,\tau_2)u^2(t,\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2, \forall(t,x,y,\tau_1,\tau_2)\in D_1, \\ D=[0,T]\times R^2; \quad D_1=D\times R^2, \end{cases} \qquad (2)$$

где $0<\lambda=\text{const}$, $(0,1)\ni\varepsilon_1,\varepsilon_2$ – малые параметры, $b_0(x,y,\varepsilon_1,\varepsilon_2)\in C^{3,1}(R^2)$, $f(t,x,y)$, $K(t,x,y,\tau_1,\tau_2)$ – заданные функции, при этом $C^{2,3,1}(D)\ni f(t,x,y)$ – ограниченная функция в области D; $0\le K(t,x,y,\tau_1,\tau_2)\in C^{2,3,1,0,0}(D_1)$ и интегрируемая функция по (τ_1,τ_2) в R^2, причем

$$\begin{cases} (\sup\limits_D\int\limits_{R^2}|K(t,x,y,\tau_1,\tau_2)|^2 d\tau_1 d\tau_2)^{\frac{1}{2}}\le C_1, \\ K(t,x,y,\tau_1,\tau_2)\le K_0=\text{const}, \forall(t,x,y,\tau_1,\tau_2)\in D_1, \\ \sup\limits_D\int\limits_{R^2}|K(t,x,y,\tau_1,\tau_2)|d\tau_1 d\tau_2\le C_2, \\ \mathrm{C}_0=\max(C_1,C_2), C_i=\text{const}, \ (i=1,2). \end{cases}$$

Для доказательства близости решений сингулярно-возмущенной и вырожденной задачи в пространстве $L_h^2(D)$, требуется априорная информация вида

$$\begin{cases} b_0(x,y,\varepsilon_1,\varepsilon_2)\not\to 0, \ \text{когда} \ \varepsilon_1,\varepsilon_2\to 0, \forall(x,y)\in R^2, \\ |b_0(x,y,\varepsilon_1,\varepsilon_2)|\le m_0<\infty, \forall(x,y)\in R^2, \\ \|b_0(x,y,\varepsilon_1,\varepsilon_2)\|_{L^2(R^2)}=(\int\limits_{R^2}|b_0(\tau_1,\tau_2,\varepsilon_1,\varepsilon_2)|^2 d\tau_1 d\tau_2)^{\frac{1}{2}}\le m_1\varepsilon_1^{\gamma}, \\ 0<\gamma<1; \ 0<m_i=\text{const}, \ (i=0,1). \end{cases} \qquad (3)$$

П. 1. Если $\varepsilon_1,\varepsilon_2=0$, то из (1) следует вырожденная задача:

$$\vartheta_{t^2}+\vartheta_{tx}=-[f(t,x,y)+\lambda K\vartheta], \qquad (4)$$

$$\begin{cases} \vartheta(t,x,y)\big|_{t=0}=\vartheta(0,x,y)\equiv\varphi_0(x,y), \forall(x,y)\in R^2, \\ \vartheta_t(t,x,y)\big|_{t=0}=\vartheta_t(0,x,y)\equiv\varphi_1(x,y), \forall(x,y)\in R^2, \\ C^{3,1}(R^2)\ni\varphi_i(x,y), \quad (i=0,1). \end{cases} \qquad (5)$$

Задача Коши (4), (5) эквивалентно приводится к виду

$$\begin{cases} \vartheta(t,x) = \varphi_0(x-t,y) + \int\limits_0^t \{\psi(x-(t-s),y) - \int\limits_0^s [f(\nu,x-(t-s),y) + \\ +\lambda \int\limits_{R^2} K(\nu,x-(t-s),y,\tau_1,\tau_2)\vartheta^2(\nu,\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2]d\nu\}ds \equiv (B\vartheta)(t,x,y), \\ \psi(x,y) \equiv \varphi_1(x,y) + \varphi_{0x}(x,y), \end{cases} \tag{6}$$

при этом (6) удовлетворяет уравнение (4).

Действительно, дифференцируя (6) по совокупности аргументов и подставляя (4), получим

$$\begin{cases} \vartheta_t(t,x) = -\varphi_{0h}(x-t,y) + \psi(x,y) - \int\limits_0^t [f(s,x,y) + \lambda \int\limits_{R^2} K(s,x,y,\tau_1,\tau_2) \times \\ \times \vartheta^2(s,\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2]ds - \int\limits_0^t \{\psi_{h_1}(x-(t-s),y) - \int\limits_0^s [f_{h_1}(\nu,x-(t-s),y) + \\ +\lambda \int\limits_{R^2} K_{h_1}(\nu,x-(t-s),y,\tau_1,\tau_2)\vartheta^2(\nu,\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2]d\nu\}ds, (h = x-t,\ h_1 = x-(t-s)), \\ \vartheta_x(t,x) = \varphi_{0h}(x-t,y) + \int\limits_0^t \{\psi_{h_1}(x-(t-s),y) - \int\limits_0^s [f_{h_1}(\nu,x-(t-s),y) + \\ +\lambda \int\limits_{R^2} K_{h_1}(\nu,x-(t-s),y,\tau_1,\tau_2)\vartheta^2(\nu,\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2]d\nu\}ds, \\ \vartheta_t + \vartheta_x = \psi(x,y) - \int\limits_0^t [f(s,x,y) + \lambda \int\limits_{R^2} K(s,x,y,\tau_1,\tau_2)\vartheta^2(s,\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2]ds, \\ -[f + \lambda K\vartheta] = \vartheta_{t^2} + \vartheta_{xt} = -[f(t,x,y) + \lambda \int\limits_{R^2} K(t,x,y,\tau_1,\tau_2)\vartheta^2(t,\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2] = \\ = -[f + \lambda K\vartheta], \quad \forall (t,x,y) \in D, \\ K\vartheta \equiv \int\limits_{R^2} K(t,x,y,\tau_1,\tau_2)\vartheta^2(t,\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2, \\ \psi(x,y) \equiv \varphi_1(x,y) + \varphi_{0x}(x,y). \end{cases} \tag{7}$$

Что и требовалось указать.

С другой стороны, уравнение (6) является уравнением Вольтерра второго рода и она разрешима в классе функций $C^{2,3,1}(D)$, так как [9]:

$$\begin{cases} d = \lambda r_0 C_0 T^2 \le \dfrac{1}{2}, \\ B : S_r(\vartheta_0) \to S_r(\vartheta_0), \\ \|B\vartheta_0 - \vartheta_0\|_C \le (1-d)r; \quad S_r(\vartheta_0) = \{\vartheta : |\vartheta - \vartheta_0| \le r, \forall (t,x,y) \in D\},\ (\|\vartheta\|_C \le r_0), \end{cases} \tag{8}$$

причем решение уравнение (6) находим методом Пикара

$\vartheta_{n+1} = B\vartheta_n, (n = 0,1,...)$

с оценкой погрешности

$$\|\vartheta_{n+1} - \vartheta_n\|_C \le d\,\|\vartheta_n - \vartheta_{n-1}\|_C \le ... \le d^n\,\|\vartheta_1 - \vartheta_0\|_C \le d^n(1-d)r \xrightarrow[n\to\infty]{d<1} 0, \tag{9}$$

где ϑ_0 - начальное приближение. Кроме того, по условию задачи известные функции, входящие в уравнение непрерывно дифференцируемы до требуемого порядка по совокупности своих аргументов, то и решение уравнения (6) допускает аналогичное требование, т.е. имеет место: $C^{2,3,1}(D) \ni \vartheta(t,x,y)$.

Лемма 1. В условиях (8), (9) задача (4), (5) разрешима в классе функций $C^{2,3,1}(D)$.

П.2. Чтобы найти решение задачи (1), (2), предположим

$$\begin{cases} u_\varepsilon = \vartheta(t,x,y) + \Pi(t,x,y,\varepsilon_1,\varepsilon_2) + (\Im\xi)(t,x,y), \\ \vartheta(t,x,y)\big|_{t=0} = \vartheta(0,x,y), \quad \forall (x,y)\in R^2, \\ \Pi(t,x,y,\varepsilon_1,\varepsilon_2)\big|_{t=0} = b_0(x,y,\varepsilon_1,\varepsilon_2), \quad \forall (x,y)\in R^2, \\ \Im\xi \equiv \dfrac{1}{\varepsilon_1^2}\displaystyle\int_0^t \int_{-\infty}^{x-t+\nu} e^{-\frac{1}{\varepsilon_1}(x-t+\nu-\tau)} \int_\tau^\infty e^{\frac{1}{\varepsilon_1}(\tau-\tau')} \xi(\nu,\tau',y)\,d\tau' d\tau d\nu, \end{cases} \tag{10}$$

причем

$$\begin{cases} u_t = \vartheta_t + \Pi_t + (\Im\xi)_t, \\ u_x = \vartheta_x + \Pi_x + (\Im\xi)_x, \\ u_{tx} = \vartheta_{tx} + \Pi_{tx} + (\Im\xi)_{tx}, \\ u_{tx^2} = \vartheta_{tx^2} + \Pi_{tx^2} + (\Im\xi)_{tx^2}, \\ u_{x^3} = \vartheta_{x^3} + \Pi_{x^3} + (\Im\xi)_{x^3}. \end{cases} \tag{11}$$

Следовательно, подставляя (10), (11) в (1) и при этом, учитывая (4) имеем

$$\begin{cases} \vartheta_{t^2} + \vartheta_{tx} = -[f(t,x,y) + \lambda K\vartheta], \quad \forall (t,x,y)\in D, \\ \vartheta(t,x,y)\big|_{t=0} = \vartheta(0,x,y), \\ \vartheta_t(t,x,y)\big|_{t=0} = \vartheta_t(0,x,y), \quad \forall (x,y)\in R^2, \\ \Pi_t(t,x,y,\varepsilon_1,\varepsilon_2) + \Pi_x(t,x,y,\varepsilon_1,\varepsilon_2) = 0, \\ \Pi(t,x,y,\varepsilon_1,\varepsilon_2)\big|_{t=0} = b_0(x,y,\varepsilon_1,\varepsilon_2), \quad \forall (x,y)\in R^2, \\ \varepsilon_1^2 \dfrac{\partial}{\partial t}[(\Im\xi)_{tx^2} + (\Im\xi)_{x^3}] - \varepsilon_2 \dfrac{\partial}{\partial y}[\varepsilon_1^2((\Im\xi)_{tx^2} + (\Im\xi)_{x^3}) - (\Im\xi)_t - (\Im\xi)_x] = \\ = \dfrac{\partial}{\partial t}[(\Im\xi)_t + (\Im\xi)_x] + \lambda \displaystyle\int_{R^2} K(t,x,y,\tau_1,\tau_2)[2\vartheta(t,\tau_1,\tau_2)\dfrac{1}{\varepsilon_1^2}\int_0^t \int_{-\infty}^{\tau_1-t+\nu} e^{-\frac{1}{\varepsilon_1}(\tau_1-t+\nu-\tau)} \times \\ \times \displaystyle\int_\tau^\infty e^{\frac{1}{\varepsilon_1}(\tau-\tau')} \xi(\nu,\tau',\tau_2)\,d\tau' d\tau d\nu + 2\Pi(t,\tau_1,\tau_2,\varepsilon_1,\varepsilon_2)\dfrac{1}{\varepsilon_1^2}\int_0^t \int_{-\infty}^{\tau_1-t+\nu} e^{-\frac{1}{\varepsilon_1}(\tau_1-t+\nu-\tau)} \times \\ \times \displaystyle\int_\tau^\infty e^{\frac{1}{\varepsilon_1}(\tau-\tau')} \xi(\nu,\tau',\tau_2)\,d\tau' d\tau d\nu + (\dfrac{1}{\varepsilon_1^2}\int_0^t \int_{-\infty}^{\tau_1-t+\nu} e^{-\frac{1}{\varepsilon_1}(\tau_1-t+\nu-\tau)} \int_\tau^\infty e^{\frac{1}{\varepsilon_1}(\tau-\tau')} \xi(\nu,\tau',\tau_2)\,d\tau' d\tau d\nu)^2] \times \\ \times d\tau_1 d\tau_2 + \Upsilon(t,x,y,\varepsilon_1,\varepsilon_2), \\ \Upsilon(t,x,y,\varepsilon_1,\varepsilon_2) \equiv -\varepsilon_1^2[\vartheta_{t^2x^2} + \vartheta_{tx^3}] + \varepsilon_2[\varepsilon_1^2(\vartheta_{tyx^2} + \vartheta_{yx^3}) - \vartheta_{ty} - \vartheta_{yx}] + \lambda \displaystyle\int_{R^2} K(t,x,y,\tau_1,\tau_2) \times \\ \times [2\vartheta(t,\tau_1,\tau_2)\Pi(t,\tau_1,\tau_2,\varepsilon_1,\varepsilon_2) + \Pi^2(t,\tau_1,\tau_2,\varepsilon_1,\varepsilon_2)]\,d\tau_1 d\tau_2, \quad (t,x,y)\in D, \end{cases}$$

(12)

где

$$
\begin{cases}
(\Im\xi)_t = \dfrac{1}{\varepsilon_1^2}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{\varepsilon_1}(x-\tau)}\int\limits_{\tau}^{\infty} e^{\frac{1}{\varepsilon_1}(\tau-\tau')}\xi(t,\tau',y)d\tau' d\tau - \dfrac{1}{\varepsilon_1^2}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{x-t+\nu}^{\infty} e^{\frac{1}{\varepsilon_1}(x-t+\nu-\tau')}\times \\
\times\xi(\nu,\tau',y)d\tau' d\nu + \dfrac{1}{\varepsilon_1^2}\dfrac{1}{\varepsilon_1}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-\infty}^{x-t+\nu} e^{-\frac{1}{\varepsilon_1}(x-t+\nu-\tau)}\int\limits_{\tau}^{\infty} e^{\frac{1}{\varepsilon_1}(\tau-\tau')}\xi(\nu,\tau',y)d\tau' d\tau d\nu, \\
(\Im\xi)_x = \dfrac{1}{\varepsilon_1^2}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{x-t+\nu}^{\infty} e^{\frac{1}{\varepsilon_1}(x-t+\nu-\tau')}\xi(\nu,\tau',y)d\tau' d\nu - \dfrac{1}{\varepsilon_1^2}\dfrac{1}{\varepsilon_1}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-\infty}^{x-t+\nu} e^{-\frac{1}{\varepsilon_1}(x-t+\nu-\tau)}\times \\
\times\int\limits_{\tau}^{\infty} e^{\frac{1}{\varepsilon_1}(\tau-\tau')}\xi(\nu,\tau',y)d\tau' d\tau d\nu, \\
(\Im\xi)_t + (\Im\xi)_x = \dfrac{1}{\varepsilon_1^2}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{\varepsilon_1}(x-\tau)}\int\limits_{\tau}^{\infty} e^{\frac{1}{\varepsilon_1}(\tau-\tau')}\xi(t,\tau',y)d\tau' d\tau, \\
(\Im\xi)_{tx} + (\Im\xi)_{x^2} = \dfrac{1}{\varepsilon_1^2}\int\limits_{x}^{\infty} e^{\frac{1}{\varepsilon_1}(x-\tau')}\xi(t,\tau',y)d\tau' - \dfrac{1}{\varepsilon_1^2}\dfrac{1}{\varepsilon_1}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{\varepsilon_1}(x-\tau)}\int\limits_{\tau}^{\infty} e^{\frac{1}{\varepsilon_1}(\tau-\tau')}\times \\
\times\xi(t,\tau',y)d\tau' d\tau, \\
(\Im\xi)_{tx^2} + (\Im\xi)_{x^3} = -\dfrac{1}{\varepsilon_1^2}\xi(t,x,y) + \dfrac{1}{\varepsilon_1^2}\dfrac{1}{\varepsilon_1}\int\limits_{x}^{\infty} e^{\frac{1}{\varepsilon_1}(x-\tau')}\xi(t,\tau',y)d\tau' - \\
-\dfrac{1}{\varepsilon_1^2}\dfrac{1}{\varepsilon_1}\int\limits_{x}^{\infty} e^{\frac{1}{\varepsilon_1}(x-\tau)}\xi(t,\tau',y)d\tau' + \dfrac{1}{\varepsilon_1^2}\dfrac{1}{\varepsilon_1^2}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{\varepsilon_1}(x-\tau)}\int\limits_{\tau}^{\infty} e^{\frac{1}{\varepsilon_1}(\tau-\tau')}\xi(t,\tau',y)d\tau' d\tau = \qquad (13) \\
= -\dfrac{1}{\varepsilon_1^2}\xi(t,x,y) + \dfrac{1}{\varepsilon_1^2}\dfrac{1}{\varepsilon_1^2}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{\varepsilon_1}(x-\tau)}\int\limits_{\tau}^{\infty} e^{\frac{1}{\varepsilon_1}(\tau-\tau')}\xi(t,\tau',y)d\tau' d\tau.
\end{cases}
$$

Отсюда видно, что из задачи

$$\Pi_t(t,x,y,\varepsilon_1,\varepsilon_2) + \Pi_x(t,x,y,\varepsilon_1,\varepsilon_2) = 0, \qquad (14)$$

$$\Pi(t,x,y,\varepsilon_1,\varepsilon_2)\big|_{t=0} = b_0(x,y,\varepsilon_1,\varepsilon_2), \forall(x,y)\in R^2 \qquad (15)$$

единственным точным образом определяется функция $\Pi(t,x,y,\varepsilon_1,\varepsilon_2)$, т.е.

$$\Pi(t,x,y,\varepsilon_1,\varepsilon_2) = b_0(x-t,y,\varepsilon_1,\varepsilon_2), \forall(t,x,y)\in D, \qquad (16)$$

так как имеет место

$$
\begin{cases}
\Pi_t(t,x,y,\varepsilon_1,\varepsilon_2) = -b_{0h}(x-t,y,\varepsilon_1,\varepsilon_2), \quad (h = x-t), \\
\Pi_x(t,x,y,\varepsilon_1,\varepsilon_2) = b_{0h}(x-t,y,\varepsilon_1,\varepsilon_2), \quad \forall(t,x,y)\in D, \\
\Pi_t + \Pi_x = 0.
\end{cases}
$$

При этом, учитывая заданную информацию (3) относительно функции $\Pi(t,x,y,\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ получим оценку в $L_h^2(D)$ в виде

$$
\begin{cases}
\|\Pi\|_{L_h^2(D)} = (\sup\limits_{[0,T]} \int\limits_0^t \int\limits_{R^2} h(\tau_1,\tau_2)\left|\Pi(s,\tau_1,\tau_2,\varepsilon_1,\varepsilon_2)\right|^2 d\tau_1 d\tau_2 ds)^{\frac{1}{2}} \le \sqrt{\tilde{h}_0 T} m_1 \varepsilon_1^{\gamma} \xrightarrow[\varepsilon_1 \to 0]{} 0,\\
\|b_0\|_{L_h^2(D)} = (\int\limits_{R^2} \left|b_0(\tau_1,\tau_2,\varepsilon_1,\varepsilon_2)\right|^2 d\tau_1 d\tau_2)^{\frac{1}{2}} \le m_1 \varepsilon_1^{\gamma},\\
0<\gamma<1;\ 0<m_1=\text{const},\\
0 \le h(x,y) \le \tilde{h}_0 = \text{const} < \infty,\ \forall (x,y)\in R^2\text{:}\quad \int\limits_{R^2} h(\tau_1,\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \le h_0 = \text{const}.
\end{cases} \tag{17}
$$

Далее, учитывая (13), (16) из (12) получим

$$
\begin{cases}
\xi_t(t,x,y) - \varepsilon_2 \xi_y(t,x,y) = -\{\lambda \int\limits_{R^2} K(t,x,y,\tau_1,\tau_2)[2\vartheta(t,\tau_1,\tau_2)\dfrac{1}{\varepsilon_1^2}\int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{\tau_1-t+\nu} e^{-\frac{1}{\varepsilon_1}(\tau_1-t+\nu-\tau)} \times\\
\times \int\limits_{\tau}^{\infty} e^{\frac{1}{\varepsilon_1}(\tau-\tau')} \xi(\nu,\tau',\tau_2) d\tau' d\tau d\nu + 2b_0(\tau_1-t,\tau_1,\tau_2,\varepsilon_1,\varepsilon_2)\dfrac{1}{\varepsilon_1^2}\int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{\tau_1-t+\nu} e^{-\frac{1}{\varepsilon_1}(\tau_1-t+\nu-\tau)} \times\\
\times \int\limits_{\tau}^{\infty} e^{\frac{1}{\varepsilon_1}(\tau-\tau')} \xi(\nu,\tau',\tau_2) d\tau' d\tau d\nu + (\dfrac{1}{\varepsilon_1^2}\int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{\tau_1-t+\nu} e^{-\frac{1}{\varepsilon_1}(\tau_1-t+\nu-\tau)} \int\limits_{\tau}^{\infty} e^{\frac{1}{\varepsilon_1}(\tau-\tau')} \xi(\nu,\tau',\tau_2) d\tau' d\tau d\nu)^2] \times\\
\times d\tau_1 d\tau_2 + \Upsilon(t,x,y,\varepsilon_1,\varepsilon_2)\} \equiv (H\xi)(t,x,y),\\
\Upsilon(t,x,y,\varepsilon_1,\varepsilon_2) \equiv -\varepsilon_1^2[\vartheta_{t^2x^2} + \vartheta_{tx^3}] + \varepsilon_2[\varepsilon_1^2(\vartheta_{tyx^2} + \vartheta_{yx^3}) - \vartheta_{ty} - \vartheta_{yx}] + \lambda \int\limits_{R^2} K(t,x,y,\tau_1,\tau_2) \times\\
\times [2\vartheta(t,\tau_1,\tau_2) b_0(\tau_1-t,\tau_1,\tau_2,\varepsilon_1,\varepsilon_2) + b_0^2(\tau_1-t,\tau_1,\tau_2,\varepsilon_1,\varepsilon_2)] d\tau_1 d\tau_2,\quad (t,x,y)\in D,\\
\left|\Upsilon(t,x,y,\varepsilon_1,\varepsilon_2)\right| \le 2\tilde{r}_0(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2) + \lambda(2r_0(\int\limits_{R^2} \left|K(t,x,y,\tau_1,\tau_2)\right|^2 d\tau_1 d\tau_2)^{\frac{1}{2}} \times\\
\times (\int\limits_{R^2} \left|b_0(\tau_1,\tau_2,\varepsilon_1,\varepsilon_2)\right|^2 d\tau_1 d\tau_2)^{\frac{1}{2}} + K_0(\int\limits_{R^2} \left|b_0(\tau_1,\tau_2,\varepsilon_1,\varepsilon_2)\right|^2 d\tau_1 d\tau_2)^{\frac{1}{2}} \times\\
\times (\int\limits_{R^2} \left|b_0(\tau_1,\tau_2,\varepsilon_1,\varepsilon_2)\right|^2 d\tau_1 d\tau_2)^{\frac{1}{2}}) \le 2\tilde{r}_0(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2) + \lambda(2r_0 C_1 m_1 \varepsilon_1^{\gamma} + K_0(m_1\varepsilon_1^{\gamma})^2) =\\
= \Delta_1(\varepsilon_1,\varepsilon_2),\quad \forall (t,x,y)\in D,\\
\Upsilon(t,x,y,\varepsilon_1,\varepsilon_2) \xrightarrow[\varepsilon_1,\varepsilon_2 \to 0]{} 0,\ \forall (t,x,y)\in D,\\
\left|\vartheta_{t^2x^2}\right|,\ \left|\vartheta_{tx^3}\right|,\ \left|\vartheta_{tyx^2}\right|,\ \left|\vartheta_{yx^3}\right|,\ \left|\vartheta_{ty}\right|,\ \left|\vartheta_{yx}\right| \le \tilde{r}_0,\quad \forall (t,x,y)\in D,\ (\|\vartheta\|_C \le r_0).
\end{cases} \tag{18}
$$

По условию задачи начальные условия относительно функция u определяется в виде (2), поэтому, на основе (10), (16) имеем

$$
\begin{cases}
u_{\varepsilon} = \vartheta(t,x,y) + \Pi(t,x,y,\varepsilon_1,\varepsilon_2) + (\Im\xi)(t,x,y),\\
u_t = \vartheta_t + \Pi_t + (\Im\xi)_t,\\
\Pi(t,x,y,\varepsilon_1,\varepsilon_2) = b_0(x-t,y,\varepsilon_1,\varepsilon_2), \forall (t,x,y)\in D,\\
u\big|_{t=0} = (\vartheta(t,x,y) + b_0(x-t,y,\varepsilon_1,\varepsilon_2) + (\Im\xi))\big|_{t=0} = \vartheta(0,x,y) + b_0(x,y,\varepsilon_1,\varepsilon_2),
\end{cases}
$$

$$\begin{cases} u_t\big|_{t=0} = (\vartheta_t(t,x,y) - b_{0h}(x-t,y,\varepsilon_1,\varepsilon_2) + (\Im\xi)_t)\big|_{t=0} = \vartheta_t(0,x,y) - b_{0x}(x,y,\varepsilon_1,\varepsilon_2), \\ (\Im\xi)_t\ \big|_{t=0} = [\frac{1}{\varepsilon_1^2}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{\varepsilon_1}(x-\tau)}\int\limits_{\tau}^{\infty} e^{\frac{1}{\varepsilon_1}(\tau-\tau')}\xi(t,\tau',y)d\tau' d\tau - \frac{1}{\varepsilon_1^2}\int\limits_0^t\int\limits_{x-t+\nu}^{\infty} e^{\frac{1}{\varepsilon_1}(x-t+\nu-\tau')}\times \\ \times\xi(\nu,\tau',y)d\tau' d\nu + \frac{1}{\varepsilon_1^2}\frac{1}{\varepsilon_1}\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^{x-t+\nu} e^{-\frac{1}{\varepsilon_1}(x-t+\nu-\tau)}\int\limits_{\tau}^{\infty} e^{\frac{1}{\varepsilon_1}(\tau-\tau')}\xi(\nu,\tau',y)d\tau' d\tau d\nu]\ \big|_{t=0} = 0, \\ \xi(0,x,y) = 0, \quad \forall (x,y)\in R^2. \end{cases} \quad (19)$$

При условии (19) из (18) следует уравнение вида

$$\xi(t,x,y) = -\int\limits_0^t \{\lambda\int\limits_{R^2} K(s,x,y+\varepsilon_2(t-s),\tau_1,\tau_2)[2\vartheta(s,\tau_1,\tau_2)\frac{1}{\varepsilon_1^2}\int\limits_0^s\int\limits_{-\infty}^{\tau_1-s+\nu} e^{-\frac{1}{\varepsilon_1}(\tau_1-s+\nu-\tau)}\times$$
$$\times\int\limits_{\tau}^{\infty} e^{\frac{1}{\varepsilon_1}(\tau-\tau')}\xi(\nu,\tau',\tau_2)d\tau' d\tau d\nu + 2b_0(\tau_1-s,\tau_1,\tau_2,\varepsilon_1,\varepsilon_2)\frac{1}{\varepsilon_1^2}\int\limits_0^s\int\limits_{-\infty}^{\tau_1-s+\nu} e^{-\frac{1}{\varepsilon_1}(\tau_1-s+\nu-\tau)}\times \quad (20)$$
$$\times\int\limits_{\tau}^{\infty} e^{\frac{1}{\varepsilon_1}(\tau-\tau')}\xi(\nu,\tau',\tau_2)d\tau' d\tau d\nu + (\frac{1}{\varepsilon_1^2}\int\limits_0^s\int\limits_{-\infty}^{\tau_1-s+\nu} e^{-\frac{1}{\varepsilon_1}(\tau_1-s+\nu-\tau)}\int\limits_{\tau}^{\infty} e^{\frac{1}{\varepsilon_1}(\tau-\tau')}\xi(\nu,\tau',\tau_2)d\tau' d\tau d\nu)^2]\times$$
$$\times d\tau_1 d\tau_2 + \Upsilon(s,x,y+\varepsilon_2(t-s),\varepsilon_1,\varepsilon_2)\}ds \equiv (P\xi)(t,x,y).$$

Действительно, дифференцируя (20) по t, y и полученные выражения, подставляя в (18) имеем

$$\begin{cases} \xi_t = H\xi - \int\limits_0^t\{\lambda\int\limits_{R^2}\varepsilon_2 K_{h_1}(s,x,y+\varepsilon_2(t-s),\tau_1,\tau_2)[2\vartheta(s,\tau_1,\tau_2)\frac{1}{\varepsilon_1^2}\int\limits_0^s\int\limits_{-\infty}^{\tau_1-s+\nu} e^{-\frac{1}{\varepsilon_1}(\tau_1-s+\nu-\tau)}\int\limits_{\tau}^{\infty} e^{\frac{1}{\varepsilon_1}(\tau-\tau')}\times \\ \times\xi(\nu,\tau',\tau_2)d\tau' d\tau d\nu + 2b_0(\tau_1-s,\tau_1,\tau_2,\varepsilon_1,\varepsilon_2)\frac{1}{\varepsilon_1^2}\int\limits_0^s\int\limits_{-\infty}^{\tau_1-s+\nu} e^{-\frac{1}{\varepsilon_1}(\tau_1-s+\nu-\tau)}\int\limits_{\tau}^{\infty} e^{\frac{1}{\varepsilon_1}(\tau-\tau')}\xi(\nu,\tau',\tau_2)d\tau' d\tau d\nu + \\ +(\frac{1}{\varepsilon_1^2}\int\limits_0^s\int\limits_{-\infty}^{\tau_1-s+\nu} e^{-\frac{1}{\varepsilon_1}(\tau_1-s+\nu-\tau)}\int\limits_{\tau}^{\infty} e^{\frac{1}{\varepsilon_1}(\tau-\tau')}\xi(\nu,\tau',\tau_2)d\tau' d\tau d\nu)^2]d\tau_1 d\tau_2 + \varepsilon_2\Upsilon_{h_1}(s,x,y+ \\ +\varepsilon_2(t-s),\varepsilon_1,\varepsilon_2)\}ds \equiv H\xi + \varepsilon_2 H_1\xi, \\ \xi_y = -\int\limits_0^t\{\lambda\int\limits_{R^2} K_{h_1}(s,x,y+\varepsilon_2(t-s),\tau_1,\tau_2)[2\vartheta(s,\tau_1,\tau_2)\frac{1}{\varepsilon_1^2}\int\limits_0^s\int\limits_{-\infty}^{\tau_1-s+\nu} e^{-\frac{1}{\varepsilon_1}(\tau_1-s+\nu-\tau)}\int\limits_{\tau}^{\infty} e^{\frac{1}{\varepsilon_1}(\tau-\tau')}\xi(\nu,\tau',\tau_2)\times \\ \times d\tau' d\tau d\nu + 2b_0(\tau_1-s,\tau_1,\tau_2,\varepsilon_1,\varepsilon_2)\frac{1}{\varepsilon_1^2}\int\limits_0^s\int\limits_{-\infty}^{\tau_1-s+\nu} e^{-\frac{1}{\varepsilon_1}(\tau_1-s+\nu-\tau)}\int\limits_{\tau}^{\infty} e^{\frac{1}{\varepsilon_1}(\tau-\tau')}\xi(\nu,\tau',\tau_2)d\tau' d\tau d\nu + \\ +(\frac{1}{\varepsilon_1^2}\int\limits_0^s\int\limits_{-\infty}^{\tau_1-s+\nu} e^{-\frac{1}{\varepsilon_1}(\tau_1-s+\nu-\tau)}\int\limits_{\tau}^{\infty} e^{\frac{1}{\varepsilon_1}(\tau-\tau')}\xi(\nu,\tau',\tau_2)d\tau' d\tau d\nu)^2]d\tau_1 d\tau_2 + \Upsilon_{h_1}(s,x,y+ \\ +\varepsilon_2(t-s),\varepsilon_1,\varepsilon_2)\}ds \equiv H_1\xi, \\ h_1 = y + \varepsilon_2(t-s), \\ H_1\xi \equiv -\int\limits_0^t\{\lambda\int\limits_{R^2} K_{h_1}(s,x,y+\varepsilon_2(t-s),\tau_1,\tau_2)[2\vartheta(s,\tau_1,\tau_2)\frac{1}{\varepsilon_1^2}\int\limits_0^s\int\limits_{-\infty}^{\tau_1-s+\nu} e^{-\frac{1}{\varepsilon_1}(\tau_1-s+\nu-\tau)}\int\limits_{\tau}^{\infty} e^{\frac{1}{\varepsilon_1}(\tau-\tau')}\xi(\nu,\tau',\tau_2)\times \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
\times d\tau' d\tau d\nu + 2b_0(\tau_1 - s, \tau_1, \tau_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2)\dfrac{1}{\varepsilon_1^2}\int\limits_0^s \int\limits_{-\infty}^{\tau_1 - s+\nu} e^{-\frac{1}{\varepsilon_1}(\tau_1 - s+\nu-\tau)} \int\limits_{\tau}^{\infty} e^{\frac{1}{\varepsilon_1}(\tau-\tau')} \xi(\nu, \tau', \tau_2) d\tau' d\tau d\nu + \\
+(\dfrac{1}{\varepsilon_1^2}\int\limits_0^s \int\limits_{-\infty}^{\tau_1 - s+\nu} e^{-\frac{1}{\varepsilon_1}(\tau_1 - s+\nu-\tau)} \int\limits_{\tau}^{\infty} e^{\frac{1}{\varepsilon_1}(\tau-\tau')} \xi(\nu, \tau', \tau_2) d\tau' d\tau d\nu)^2] d\tau_1 d\tau_2 + \Upsilon_{h_1}(s, x, y+\varepsilon_2(t-s), \varepsilon_1, \varepsilon_2)\} ds, \\
H\xi = \xi_t - \varepsilon_2 \xi_y = H\xi + \varepsilon_2 H_1 \xi - \varepsilon_2 H_1 \xi = H\xi.
\end{cases}
$$

Что требовалось показать.

С другой стороны, уравнение (20) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода. Поэтому, не нарушая общности, допускаем, что если относительно оператора P выполняются условия Банаха, т.е.

$$
\begin{cases}
d_P = \lambda T^2 C_0 (m_1 + \dfrac{2}{3} T r_1) + \lambda r_0 C_0 T^2 < 1, \\
P : S_{r_1} \to S_{r_1}, \\
S_{r_1}(0) = \{\xi : |\xi(t,x,y)| \le r_1, \forall (t,x,y) \in D\}; \quad \|(P0)(t,x,y)\|_C \le (1-d_P) r_1 : \\
\|(P\xi)(t,x,y)\|_C \le \|(P\xi)(t,x,y) - (P0)(t,x,y)\|_C + \|(P0)(t,x,y)\|_C \le d_P r_1 + (1-d_P) r_1 = r_1,
\end{cases} \tag{21}
$$

здесь

$$
\begin{cases}
\varepsilon \in (0,1);\ C_0 = \max(C_1, C_2); \quad \text{см.(8)},\ d = \lambda r_0 C_0 T^2 \le \dfrac{1}{2}, \\
|\xi_2 - \xi_1| = |-\int\limits_0^t \{\lambda \int\limits_{R^2} K(s, x, y+\varepsilon_2(t-s), \tau_1, \tau_2)[2\vartheta(s, \tau_1, \tau_2)\dfrac{1}{\varepsilon_1^2}\int\limits_0^s \int\limits_{-\infty}^{\tau_1 - s+\nu} e^{-\frac{1}{\varepsilon_1}(\tau_1 - s+\nu-\tau)} \times \\
\times \int\limits_{\tau}^{\infty} e^{\frac{1}{\varepsilon_1}(\tau-\tau')} \xi_2(\nu, \tau', \tau_2) d\tau' d\tau d\nu + 2b_0(\tau_1 - s, \tau_1, \tau_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2)\dfrac{1}{\varepsilon_1^2}\int\limits_0^s \int\limits_{-\infty}^{\tau_1 - s+\nu} e^{-\frac{1}{\varepsilon_1}(\tau_1 - s+\nu-\tau)} \times \\
\times \int\limits_{\tau}^{\infty} e^{\frac{1}{\varepsilon_1}(\tau-\tau')} \xi_2(\nu, \tau', \tau_2) d\tau' d\tau d\nu + (\dfrac{1}{\varepsilon_1^2}\int\limits_0^s \int\limits_{-\infty}^{\tau_1 - s+\nu} e^{-\frac{1}{\varepsilon_1}(\tau_1 - s+\nu-\tau)} \int\limits_{\tau}^{\infty} e^{\frac{1}{\varepsilon_1}(\tau-\tau')} \xi_2(\nu, \tau', \tau_2) d\tau' d\tau d\nu)^2] \times \\
\times d\tau_1 d\tau_2 + \Upsilon(s, x, y+\varepsilon_2(t-s), \varepsilon_1, \varepsilon_2)\} ds + \\
-\int\limits_0^t \{\lambda \int\limits_{R^2} K(s, x, y+\varepsilon_2(t-s), \tau_1, \tau_2)[2\vartheta(s, \tau_1, \tau_2)\dfrac{1}{\varepsilon_1^2}\int\limits_0^s \int\limits_{-\infty}^{\tau_1 - s+\nu} e^{-\frac{1}{\varepsilon_1}(\tau_1 - s+\nu-\tau)} \times \\
\times \int\limits_{\tau}^{\infty} e^{\frac{1}{\varepsilon_1}(\tau-\tau')} \xi_1(\nu, \tau', \tau_2) d\tau' d\tau d\nu + 2b_0(\tau_1 - s, \tau_1, \tau_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2)\dfrac{1}{\varepsilon_1^2}\int\limits_0^s \int\limits_{-\infty}^{\tau_1 - s+\nu} e^{-\frac{1}{\varepsilon_1}(\tau_1 - s+\nu-\tau)} \times \\
\times \int\limits_{\tau}^{\infty} e^{\frac{1}{\varepsilon_1}(\tau-\tau')} \xi_1(\nu, \tau', \tau_2) d\tau' d\tau d\nu + (\dfrac{1}{\varepsilon_1^2}\int\limits_0^s \int\limits_{-\infty}^{\tau_1 - s+\nu} e^{-\frac{1}{\varepsilon_1}(\tau_1 - s+\nu-\tau)} \int\limits_{\tau}^{\infty} e^{\frac{1}{\varepsilon_1}(\tau-\tau')} \xi_1(\nu, \tau', \tau_2) d\tau' d\tau d\nu)^2] \times \\
\times d\tau_1 d\tau_2 + \Upsilon(s, x, y+\varepsilon_2(t-s), \varepsilon_1, \varepsilon_2)\} ds| \le (\lambda T^2 (C_1 m_1 \varepsilon_1^{\gamma} + \dfrac{2}{3} C_2 T r_1) + \lambda r_0 C_2 T^2) \times \\
\times \|\xi_2 - \xi_1\|_C \le (\lambda T^2 C_0 (m_1 + \dfrac{2}{3} T r_1) + \lambda r_0 C_0 T^2) \times \|\xi_2 - \xi_1\|_C = d_P \times \|\xi_2 - \xi_1\|_C,
\end{cases}
$$

то уравнение (20) имеет единственное решение в $C(D)$, причем

$$
\|\xi\|_C \le (1-d_P)^{-1} T \|\Upsilon(t,x,y,\varepsilon_1,\varepsilon_2)\|_C \le (1-d_P)^{-1} T \Delta_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \Delta_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \xrightarrow[\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0]{} 0. \tag{22}
$$

Поэтому решение (20) находим методом Пикара и при этом имеем

$$\begin{cases} \xi_{n+1} = P\xi_n, (n = 0,1,...), \\ \|\xi_{n+1} - \xi\|_C \le d_P^{n+1} r_1 \xrightarrow[n\to\infty]{d<1} 0. \end{cases} \qquad (23)$$

Лемма 2. Если имеют место условия (21), (22), то уравнение (20) разрешимо в $C(D)$.

Таким образом, мы показали, что непрерывно-ограниченное решение интегрального уравнения (20) есть решение сингулярно-возмущенного интегро-дифференциального уравнения (18). Следовательно, учитывая (10), (17) и (22) получим

$$\begin{cases} \|u_\varepsilon(t,x,y) - \vartheta(t,x,y)\|_{L_h^2(D)} \le \sqrt{2}[\sup\limits_{[0,T]} \int\limits_0^t \int\limits_{R^2} h(\tau_1,\tau_2) |\Pi(s,\tau_1,\tau_2,\varepsilon_1,\varepsilon_2)|^2 d\tau_1 d\tau_2 ds + \\ +(T\Delta_2(\varepsilon_1,\varepsilon_2))^2 T h_0]^{\frac{1}{2}} \le \sqrt{2}[\tilde{h}_0 T (m_1 \varepsilon_1^\gamma)^2 + (T\Delta_2(\varepsilon_1,\varepsilon_2))^2 T h_0]^{\frac{1}{2}} = N_0(\varepsilon_1,\varepsilon_2) \xrightarrow[\varepsilon_1\to 0]{} 0, \\ 0 < \gamma < 1;\ 0 < m_1 = \text{const}, \\ 0 \le h(x,y) \le \tilde{h}_0 = \text{const} < \infty,\ \forall (x,y) \in R^2 \colon \int\limits_{R^2} h(\tau_1,\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \le h_0 = \text{const}. \end{cases} \qquad (24)$$

Теорема 1. В условиях лемм 1, 2 и (24) близость решение сингулярно-возмущенной и вырожденной задачи оценима в смысле $L_h^2(D)$ по правилу (24), когда $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$.

Список литературы / References

1. *Бутузов В.Ф.* Угловой погранслой в сингулярно-возмущенных задачах с частными производными // Дифференц. уравнения, 1979. Т. 15. Вып. 10. С. 1848 - 1862.
2. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно-возмущенных уравнений. Москва: Наука, 1973. С. 272.
3. *Винокуров В.П.* Асимптотические поведение решений одного класса интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра // Дифференц. уравнения. Т. 3. № 10. С. 1732 - 1744.
4. *Иманалиев М.И.* Методы решения нелинейных обратных задач и их приложение. Фрунзе: Илим, 1977. С.348.
5. *Касымов К.А., Дауылбаев М.К.* Об оценке решений задачи Коши с начальным скачком любого порядка для линейных сингулярно-возмущенных интегро-дифференциальных уравнений // ДУ, 1999. Т. 35. Вып. 6. С. 822 – 830.
6. *Ландау Л.Д.,* Лифщиц Е.М. Теоретическая физика: Т. 6. Гидродинамика. Москва: Наука, 1988. С. 736.
7. *Омуров Т.Д., Туганбаев М.М.* Прямые и обратные задачи односкоростной теории переноса // ИТ и ПМ НАН КР. Бишкек: Илим, 2010. С. 116 .
8. *Омуров Т.Д., Алиева А.* Задача коши для нелинейного сингулярно-возмущенного интегро-дифференциального уравнения третьего порядка в неограниченной области // Приволжский научный вестник, 2016. № 12-1 (64). С. 36 - 43.
9. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. Москва: Наука, 1980. С. 496.
10. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. – Москва: Наука, 1974. С. 712.