КРАТНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ПО РЕШЕНИЮ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРОМ В КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ

Намазова Н.М. Email: Namazova1790@scientifictext.ru

Намазова Наиля Магаммед - преподаватель,
кафедра математического анализа, механико-математический факультет,
Нахчыванский государственный университет, г. Баку, Азербайджанская Республика

Аннотация: *в работе для двучленного уравнения 4-го порядка со спектральным параметром в краевых условиях найден явный вид характеристического определителя, корнями которого являются собственные значения рассматриваемой краевой задачи, разбивая плоскость комплексного параметра на секторы получена асимптотика функции Грина вне малой окрестности собственных значений и доказано что она убывает с определённом ростом по спектральному параметру. Получено 4-кратное разложение гладких функций по собственным и присоединенным функциям краевой задачи.*
Ключевые слова: *волновое уравнение, смешанные задачи, вычеты, собственные значения, функция Грина.*

THE MULTIPLE EXPANSION IN SOLVING BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH A PARAMETER IN THE BOUNDARY CONDITIONS

Namazova N.M. Email: Namazova1790@scientifictext.ru

Namazova Naila Maqammed - assistant of professor,
Department of Mathematical Analysis, Mechanics and Mathematics Faculty,
Nakhchivan State University, Baku, Republic of Azerbaijan

Abstract: *in this work, we obtained that for the two-term equation of 4th order with spectral parameter in the boundary conditions found explicit form of the characteristic determinant, whose roots are the eigenvalues of the boundary value problem, breaking the plane of the complex parameter in the sectors obtained asymptotic Grin function outside a small neighborhood of eigenvalues. Generally proved that, it decreases to a certain increase in the spectral parameter. In the conclusion, we obtained that 4-fold expansion of the smooth functions on its own and associated functions of the boundary value problem.*
Keywords*: wave equation, mixed problems, deductions, eigenvalues, the Grin function*

УДК 517.43

Рассмотрим следующую спектральную задачу на отрезке $[0, 1]$:

$$y^{IV}(x) - \lambda^4 y(x) = h(x) \qquad (1)$$

$$\begin{gathered} \Im_1(y) \equiv y(0) = 0, \quad \Im_2(y) \equiv y'(0) = 0 \\ \Im_3(y) = y''(0) + \lambda^2 y(1) = 0, \quad \Im_4(y) = y'''(0) + \lambda^4 y'(1) = 0, \end{gathered} \qquad (2)$$

где $h(x)$ есть непрерывная функция, λ - комплексный спектральный параметр.

Различные спектральные аспекты для уравнения (1) с регулярными и нерегулярными нормированными краевыми условиями изучены достаточно хорошо. В частности, получены кратные разложения по собственным и присоединенным функциям регулярных краевых задач, условии полноты собственных функций нерегулярных задач и.п. А для краевых условий содержащий спектральный параметр в более общем виде А.А. Шкаликовым [1] даны определения регулярных, почти регулярных краевых задач и выделены класс краевых задач, для которых собственные функции полны в пространстве $L_2(0, 1)$.

Рассмотренная нами задача (1)-(2) специфично тем, что в краевых условиях спектральный параметр содержится несоизмеримым образом и требует отдельного рассмотрения. Подобные задачи для уравнения второго порядка рассмотрены в [2] в применении для волнового уравнения.

Согласно работе [3], решение задачи (1)-(2) представляется в виде

$$y(x, \lambda) = \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) h(\xi) d\xi = \int_0^1 \frac{\Delta(x, \xi, \lambda)}{\Delta(\lambda)} h(\xi) d\xi, \qquad (3)$$

где

$$\Delta(x,\xi,\lambda)=\begin{vmatrix} g(x,\xi,\lambda) & У_1(x,\lambda) & У_2(x,\lambda) & У_3(x,\lambda) & У_4(x,\lambda) \\ \Im_1(g)_x & \Im_1(У_1)_x & \Im_1(У_2)_x & \Im_1(У_3)_x & \Im_1(У_4)_x \\ \Im_2(g)_x & \Im_2(У_1)_x & \Im_2(У_2)_x & \Im_2(У_3)_x & \Im_2(У_4)_x \\ \Im_3(g)_x & \Im_3(У_1)_x & \Im_3(У_2)_x & \Im_3(У_3)_x & \Im_3(У_4)_x \\ \Im_4(g)_x & \Im_4(У_1)_x & \Im_4(У_2)_x & \Im_4(У_3)_x & \Im_4(У_4)_x \end{vmatrix}, \qquad (4)$$

$У_k(x,\lambda)=e^{\varepsilon_k \lambda x}, \quad k=\overline{1,4}$ фундаментальные системы решений однородного уравнения (1), ε_k - корни 4-й степени из единицы и $\varepsilon_1=1,\ \varepsilon_2=-1,\ \varepsilon_3=i,\ \varepsilon_4=-i;$

$$g(x,\xi,\lambda)=\pm\frac{\sum\limits_{k=1}^{4} У_k(x,\lambda)W_{4k}(\xi,\lambda)}{2W(\xi,\lambda)}, \quad \begin{matrix} + & \text{при} & \xi\le x \\ - & \text{при} & \xi > x \end{matrix} \qquad (5)$$

$W(\xi,\lambda)$- есть определитель Вронского от фундаментальных систем решений, $W_{4k}(\xi,\lambda)$ - алгебраическое дополнение элементы $(4,k)$ определителя $W(\xi,\lambda)$. Непосредственным вычислением находим:

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & i & -i \\ \lambda^2+\lambda^2e^{\lambda} & \lambda^2+\lambda^2e^{-\lambda} & -\lambda^2+\lambda^2e^{i\lambda} & -\lambda^2+\lambda^2e^{-i\lambda} \\ 1+\lambda^2e^{\lambda} & -1-\lambda^2e^{-\lambda} & -i+i\lambda^2e^{i\lambda} & i-i\lambda^2e^{-i\lambda} \end{vmatrix}\lambda^4=$$

$$=\lambda^6\left[\begin{vmatrix} -1 & i & -i \\ 1+e^{-\lambda} & -1+e^{i\lambda} & -1+e^{-i\lambda} \\ -1-\lambda^2e^{-\lambda} & -i+i\lambda^2e^{i\lambda} & i-i\lambda^2e^{-i\lambda} \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 1 & i & -i \\ 1+e^{\lambda} & -1+e^{i\lambda} & -1+e^{-i\lambda} \\ 1+\lambda^2e^{\lambda} & -i+i\lambda^2e^{i\lambda} & i-i\lambda^2e^{-i\lambda} \end{vmatrix}+\right.$$

$$\left.+\begin{vmatrix} 1 & -1 & -i \\ 1+e^{\lambda} & 1+e^{-\lambda} & -1+e^{-i\lambda} \\ 1+\lambda^2e^{\lambda} & -1-\lambda^2e^{-\lambda} & i+i\lambda^2e^{-i\lambda} \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 1 & -1 & i \\ 1+e^{\lambda} & 1+e^{-\lambda} & -1+e^{i\lambda} \\ 1+\lambda^2e^{\lambda} & -1-\lambda^2e^{-\lambda} & -i+i\lambda^2e^{i\lambda} \end{vmatrix}\right]:$$

$$\begin{vmatrix} 1 & i & -i \\ 1+e^{-\lambda} & -1+e^{i\lambda} & -1+e^{-i\lambda} \\ -1-\lambda^2e^{-\lambda} & -i+i\lambda^2e^{i\lambda} & i-i\lambda^2e^{-i\lambda} \end{vmatrix}=2i\lambda^2+4i+\left[-i\lambda^2-i-\lambda^2-i\right]e^{-i\lambda}+$$

$$+\left[-i+\lambda^2--i-i\lambda^2\right]e^{i\lambda}+\left[-1+i\lambda^2+i\lambda^2+1\right]e^{-\lambda}+\left[\lambda^2-i\lambda^2\right]e^{-\lambda(1-i)}+\left[-\lambda^2-i\lambda^2\right]e^{-\lambda(1+i)};$$

$$\begin{vmatrix} 1 & i & -i \\ 1+e^{-\lambda} & -1+e^{i\lambda} & -1+e^{-i\lambda} \\ 1+\lambda^2e^{\lambda} & -i+i\lambda^2e^{i\lambda} & i-i\lambda^2e^{-i\lambda} \end{vmatrix}=-2i\lambda^2-4i+\left[i\lambda^2+i-\lambda^2+i\right]e^{-i\lambda}+$$

$$+\left[i+i\lambda^2+\lambda^2+i\right]e^{i\lambda}+\left[-1-i\lambda^2-i\lambda^2+1\right]e^{\lambda}+\left[\lambda^2+i\lambda^2\right]e^{\lambda(1+i)}+\left[i\lambda^2-\lambda^2\right]e^{\lambda(1-i)};$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -i \\ 1+e^{\lambda} & 1+e^{-\lambda} & -1+e^{-\lambda} \\ 1+\lambda^2 e^{\lambda} & -1-\lambda^2 e^{-\lambda} & i-i\lambda^2 e^{-i\lambda} \end{vmatrix} = 2i\lambda^2 + 4i + \left[-i\lambda^2 - 1 - i\lambda^2 + 1\right]e^{-i\lambda} +$$

$$+\left[i + i\lambda^2 + i - \lambda^2\right]e^{-\lambda} + \left[i + i\lambda^2 + \lambda^2 + i\right]e^{\lambda} + \left[-i\lambda^2 + \lambda^2\right]e^{-\lambda(1+i)} + \left[-\lambda^2 - i\lambda^2\right]e^{\lambda(1-i)};$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & i \\ 1+e^{\lambda} & 1+e^{-\lambda} & -1+e^{i\lambda} \\ 1+\lambda^2 e^{\lambda} & -1-\lambda^2 e^{-\lambda} & -i+i\lambda^2 e^{i\lambda} \end{vmatrix} = -2i\lambda^2 - 4i + \left[i\lambda^2 - 1 + i\lambda^2 + 1\right]e^{i\lambda} +$$

$$+\left[-i - i\lambda^2 - i - \lambda^2\right]e^{-\lambda} + \left[-i + \lambda^2 - i\lambda^2 - i\right]e^{\lambda} + \left[\lambda^2 + i\lambda^2\right]e^{\lambda(1+i)} + \left[i\lambda^2 + \lambda^2\right]e^{-\lambda(1-i)};$$

Окончательно, имеем

$$\Delta(\lambda) = 4i\lambda^6 \{\left[4\lambda^2 + 8\right] + \left[-2\lambda^2 - 2\right]e^{-i\lambda} + \left[-2\lambda^2 - 2\right]e^{i\lambda} + \left[2\lambda^2 + 2\right]e^{-\lambda} +$$
$$+\left[2\lambda^2 + 2\right]e^{\lambda} - \lambda^2 e^{-\lambda(1+i)}\lambda^2 e^{\lambda(1+i)} - \lambda^2 e^{\lambda(1-i)} \;; \qquad (6)$$

$$g(x,\xi,\lambda) = \pm\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{4} Y_k(x,\lambda) Z_k(\xi,\lambda), \quad \begin{matrix} + & 0 \le \xi \le x \le 1 \\ - & 0 \le x \le \xi \le 1 \end{matrix} \qquad (7)$$

$$Z_1(\xi,\lambda) = \frac{e^{-\lambda\xi}}{4\lambda^3};\ Z_2(\xi,\lambda) = -\frac{e^{-\lambda\xi}}{4\lambda^3};\ Z_3(\xi,\lambda) = -\frac{e^{-i\lambda\xi}}{4i\lambda^3};\ Z_4(\xi,\lambda) = \frac{e^{i\lambda\xi}}{4i\lambda^3};$$

$$g(x,\xi,\lambda) = \pm\frac{1}{2\lambda^3}\left[\frac{1}{4}e^{\lambda(x-\xi)} - \frac{1}{4}e^{-\lambda(x-\xi)} - \frac{1}{4i}e^{i\lambda(x-\xi)} + \frac{1}{4i}e^{-i\lambda(x-\xi)}\right]; \qquad (8)$$

$$\Delta(x,\xi,\lambda) = \begin{vmatrix} g(x,\xi,\lambda) & e^{-\lambda x} & e^{i\lambda x} & e^{-i\lambda x} & e^{\lambda x} \\ \Im_1(g)_x & & & & \\ \Im_2(g)_x & & \Delta(\lambda) & & \\ \Im_3(g)_x & & & & \\ \Im_4(g)_x & & & & \end{vmatrix}, \qquad (9)$$

Комплексную плоскость λ - можно разбить на такие секторы R_j, $j = \overline{1,8}$ в каждом из которых при подходящей нумерациями ε_k, $k = \overline{1,4}$ выполняются неравенства

$$\operatorname{Re}\lambda\varepsilon_1 \le \operatorname{Re}\lambda\varepsilon_2 \le \operatorname{Re}\lambda\varepsilon_3 \le \operatorname{Re}\lambda\varepsilon_4.$$

Для получении асимптотики функции Грина $G(x,\xi,\lambda)$ в секторе R_j производим следующие преобразования в $\Delta(x,\xi,\lambda)$. Его 2, 3, 4, 5 столбцы в секторе R_j: $\operatorname{Re}\lambda\varepsilon_1 \le \operatorname{Re}\lambda\varepsilon_2 \le 0 \le \operatorname{Re}\lambda\varepsilon_3 \le \operatorname{Re}\lambda\varepsilon_4$ перенумеруем по расположению ε_k, $k = \overline{1,4}$ в неравенствах от левой стороны. Умножим 2, 3, 4, 5-й столбцы $\Delta(x,\xi,\lambda)$ на $\frac{W_{4k}}{2W}$ и сложим с соответствующими элементами 1-го столбца. Полученный таким образом элемент обозначим соответственно: $g_0(x,\xi,\lambda)$, $g_1(\xi,\lambda)$, $g_2(\xi,\lambda)$, $g_3(\xi,\lambda)$, $g_4(\xi,\lambda)$.

$$g_0(x,\xi,\lambda) = \begin{cases} -\dfrac{1}{4\lambda^3}e^{\lambda(x-\xi)} - \dfrac{1}{4i\lambda^3}e^{-i\lambda(x-\xi)}, & x \le \xi \\ -\dfrac{1}{4\lambda^3}e^{-\lambda(x-\xi)} - \dfrac{1}{4i\lambda^3}e^{i\lambda(x-\xi)}, & \xi \le x \end{cases} \qquad (10)$$

$$\Im_1(g)_\lambda = -\frac{1}{8\lambda^3}\left[e^{-\lambda\xi} - e^{\lambda\xi} - \frac{1}{i}e^{-i\lambda\xi} + \frac{1}{i}e^{i\lambda\xi}\right];$$

$$\Im_2(g)_\lambda = -\frac{1}{8\lambda^3}\left[\lambda e^{-\lambda\xi} + \lambda e^{\lambda\xi} - \frac{i\lambda}{i}e^{-i\lambda\xi} - \frac{i\lambda}{i}e^{i\lambda\xi}\right];$$

$$\Im_3(g)_\lambda = -\frac{1}{8\lambda^3}\left[\lambda^2 e^{-\lambda\xi} - \lambda^2 e^{\lambda\xi} + \frac{\lambda^2}{i}e^{-i\lambda\xi} - \frac{\lambda^2}{i}e^{i\lambda\xi}\right] +$$

$$+\frac{\lambda^2}{8\lambda^3}\left[e^{\lambda(1-\xi)} - e^{-\lambda(1-\xi)} - \frac{1}{i}e^{i\lambda(1-\xi)} + \frac{1}{i}e^{-i\lambda(1-\xi)}\right];$$

$$\Im_4(g)_\lambda = -\frac{1}{8\lambda^3}\left[\lambda^3 e^{-\lambda\xi} + \lambda^3 e^{\lambda\xi} + \frac{i\lambda^3}{i}e^{-i\lambda\xi} + \frac{i\lambda^3}{i}e^{i\lambda\xi}\right] +$$

$$+\frac{\lambda^2}{8\lambda^3}\left[\lambda^5 e^{\lambda(1-\xi)} + \lambda^5 e^{-\lambda(1-\xi)} - \frac{i\lambda^5}{i}e^{i\lambda(1-\xi)} - \frac{i\lambda^5}{i}e^{-i\lambda(1-\xi)}\right];$$

$$g_1(\xi,\lambda) = -\frac{1}{8\lambda^3}e^{-\lambda\xi} + \frac{1}{8\lambda^3}e^{\lambda\xi} + \frac{1}{8i\lambda^3}e^{-i\lambda\xi} - \frac{1}{8i\lambda^3}e^{-i\lambda\xi} -$$

$$-\frac{1}{8\lambda^3}e^{\lambda\xi} - \frac{1}{8i\lambda^3}e^{-i\lambda\xi} - \frac{1}{8i\lambda^3}e^{i\lambda\xi} - \frac{1}{8\lambda^3}e^{-\lambda\xi} = \frac{1}{4\lambda^3}e^{-\lambda\xi} - \frac{1}{4i\lambda^3}e^{i\lambda\xi};$$

$$g_2(\xi,\lambda) = -\frac{1}{8\lambda^3}e^{-\lambda\xi} - \frac{1}{8\lambda^2}e^{\lambda\xi} + \frac{1}{8\lambda^2}e^{-i\lambda\xi} + \frac{1}{8\lambda^2}e^{i\lambda\xi} +$$

$$+\frac{1}{8\lambda^2}e^{\lambda\xi} - \frac{1}{8\lambda^2}e^{-i\lambda\xi} + \frac{1}{8\lambda^2}e^{i\lambda\xi} - \frac{1}{8\lambda^2}e^{-\lambda\xi} = -\frac{1}{4\lambda^2}e^{-\lambda\xi} + \frac{1}{4\lambda^2}e^{i\lambda\xi};$$

$$g_3(\xi,\lambda) = -\frac{1}{8\lambda}e^{-\lambda\xi} + \frac{1}{8\lambda}e^{\lambda\xi} - \frac{1}{8i\lambda}e^{-i\lambda\xi} + \frac{1}{8i\lambda}e^{i\lambda\xi} +$$

$$+\frac{1}{8\lambda}e^{\lambda(1-\xi)} - \frac{1}{8\lambda}e^{-\lambda(1-\xi)} - \frac{1}{8i\lambda}e^{i\lambda(1-\xi)} + \frac{1}{8i\lambda}e^{-i\lambda(1-\xi)} - \frac{1}{8\lambda}e^{-\lambda\xi} - \frac{1}{8\lambda}e^{-\lambda(1-\xi)} +$$

$$+\frac{1}{8i\lambda}e^{-i\lambda\xi} - \frac{1}{8i\lambda}e^{i\lambda(1-\xi)} + \frac{1}{8i\lambda}e^{i\lambda\xi} - \frac{1}{8i\lambda}e^{-i\lambda(1-\xi)} - \frac{1}{8\lambda}e^{-\lambda\xi} - \frac{1}{8\lambda}e^{\lambda(1-\xi)} =$$

$$= -\frac{1}{4\lambda}e^{-\lambda\xi} + \frac{1}{4i\lambda}e^{i\lambda\xi} - \frac{1}{4\lambda}e^{-\lambda(1-\xi)} - \frac{1}{4i\lambda}e^{i\lambda(1-\xi)};$$

$$g_4(\xi,\lambda) = -\frac{1}{8}e^{-\lambda\xi} - \frac{1}{8}e^{\lambda\xi} - \frac{1}{8}e^{-i\lambda\xi} + \frac{1}{8}e^{i\lambda\xi} +$$

$$+\frac{\lambda^2}{8}e^{\lambda(1-\xi)} + \frac{\lambda^2}{8}e^{-\lambda(1-\xi)} - \frac{\lambda^2}{8}e^{i\lambda(1-\xi)} - \frac{\lambda^2}{8}e^{-i\lambda(1-\xi)} + \frac{1}{8}e^{\lambda\xi} + \frac{\lambda^2}{8\lambda}e^{-\lambda(1-\xi)} +$$

$$+\frac{1}{8}e^{-i\lambda\xi} - \frac{\lambda^2}{8}e^{i\lambda(1-\xi)} + \frac{1}{8}e^{i\lambda\xi} + \frac{\lambda^2}{8}e^{-i\lambda(1-\xi)} - \frac{1}{8}e^{-\lambda\xi} - \frac{\lambda^2}{8\lambda}e^{\lambda(1-\xi)} =$$

$$= -\frac{1}{4}e^{-\lambda\xi} - \frac{1}{4}e^{i\lambda\xi} + \frac{\lambda^2}{4}e^{-\lambda(1-\xi)} - \frac{\lambda^2}{4}e^{i\lambda(1-\xi)};$$

$$
\begin{aligned}
G(x,\xi,\lambda) &= \frac{\Delta_0(x,\xi,\lambda)}{\Delta(\lambda)} = g_0(x,\xi,\lambda) e^{-\lambda x}\Bigg[\Bigg[\frac{1}{4\lambda^3}e^{-\lambda\xi} - \frac{1}{4i\lambda^3}e^{i\lambda\xi}\Bigg]\frac{\Delta_{11}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} - \\
&- \Bigg[\frac{1}{4\lambda^2}e^{-\lambda\xi} + \frac{1}{4\lambda^2}e^{i\lambda\xi}\Bigg]\frac{\Delta_{21}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} + \Bigg[-\frac{1}{4\lambda}e^{-\lambda\xi} + \frac{1}{4i\lambda}e^{i\lambda\xi} - \frac{1}{4\lambda}e^{-\lambda(1-\xi)} - \\
&- \frac{1}{4\lambda}e^{i\lambda(1-\xi)}\Bigg]\frac{\Delta_{31}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} - \Bigg[-\frac{1}{4}e^{-\lambda\xi} - \frac{1}{4}e^{i\lambda\xi} + \frac{\lambda^2}{4}e^{-\lambda(1-\xi)} - \frac{\lambda^2}{4}e^{i\lambda(1-\xi)}\Bigg]\frac{\Delta_{41}(\lambda)}{\Delta(\lambda)}\Bigg] + \\
&+ e^{i\lambda x}\Bigg[\Bigg[-\frac{1}{4\lambda^3}e^{-\lambda\xi} - \frac{1}{4i\lambda^3}e^{i\lambda\xi}\Bigg]\frac{\Delta_{12}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} - \Bigg[-\frac{1}{4\lambda^2}e^{-\lambda\xi} + \frac{1}{4\lambda^2}e^{i\lambda\xi}\Bigg]\frac{\Delta_{22}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} + \\
&+ \Bigg[-\frac{1}{4\lambda}e^{-\lambda\xi} + \frac{1}{4i\lambda}e^{i\lambda\xi} - \frac{1}{4\lambda}e^{-\lambda(1-\xi)} - \frac{1}{4i\lambda}e^{i\lambda(1-\xi)}\Bigg]\frac{\Delta_{22}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} - \Bigg[-\frac{1}{4}e^{-\lambda\xi} - \frac{1}{4}e^{i\lambda\xi} + \\
&+ \frac{\lambda^2}{4}e^{-\lambda(1-\xi)} - \frac{\lambda^2}{4}e^{i\lambda(1-\xi)}\Bigg]\frac{\Delta_{42}(\lambda)}{\Delta(\lambda)}\Bigg] - e^{-i\lambda x}\Bigg[\Bigg[-\frac{1}{4\lambda^3}e^{-\lambda\xi} - \frac{1}{4i\lambda^3}e^{i\lambda\xi}\Bigg]\frac{\Delta_{13}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} - \\
&- \Bigg[-\frac{1}{4\lambda^2}e^{-\lambda\xi} + \frac{1}{4\lambda^2}e^{i\lambda\xi}\Bigg]\frac{\Delta_{23}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} + \Bigg[-\frac{1}{4\lambda}e^{-\lambda\xi} + \frac{1}{4i\lambda}e^{i\lambda\xi} - \frac{1}{4\lambda}e^{-\lambda(1-\xi)} - \\
&- \frac{1}{4i\lambda}e^{i\lambda(1-\xi)}\Bigg]\frac{\Delta_{33}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} + \Bigg[-\frac{1}{4}e^{-\lambda\xi} - \frac{1}{4}e^{i\lambda\xi} + \frac{\lambda^2}{4}e^{-\lambda(1-\xi)} - \frac{\lambda^2}{4}e^{i\lambda(1-\xi)}\Bigg]\frac{\Delta_{43}(\lambda)}{\Delta(\lambda)}\Bigg] + \\
&+ e^{\lambda x}\Bigg[\Bigg[-\frac{1}{4\lambda^3}e^{-\lambda\xi} - \frac{1}{4i\lambda^3}e^{i\lambda\xi}\Bigg]\frac{\Delta_{14}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} - \Bigg[-\frac{1}{4\lambda^2}e^{-\lambda\xi} + \frac{1}{4\lambda^2}e^{i\lambda\xi}\Bigg]\frac{\Delta_{24}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} + \\
&+ \Bigg[-\frac{1}{4\lambda}e^{-\lambda\xi} + \frac{1}{4i\lambda}e^{i\lambda\xi} - \frac{1}{4\lambda}e^{-\lambda(1-\xi)} - \frac{1}{4i\lambda}e^{i\lambda(1-\xi)}\Bigg]\frac{\Delta_{34}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} - \\
&- \Bigg[-\frac{1}{4}e^{-\lambda\xi} - \frac{1}{4}e^{i\lambda\xi} + \frac{\lambda^2}{4}e^{-\lambda(1-\xi)} - \frac{\lambda^2}{4}e^{i\lambda(1-\xi)}\Bigg]\frac{\Delta_{44}(\lambda)}{\Delta(\lambda)}\Bigg].
\end{aligned}
\tag{11}
$$

В определителе $\Delta_{\nu p}(\lambda)$ при $p \le 2$ секторе $R_2 : \lambda = Re^{i\varphi},\ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4}$ показательной функцией, имеющей наибольшую действительную часть, является функция $e^{\lambda(1-\xi)}$ а при $p \le 3$ функции e^{λ} и $e^{-i\lambda}$. Если числитель и знаменатель $\dfrac{\Delta_0(x,\xi,\lambda)}{\Delta(\lambda)}$ умножим на $\lambda^{-8}\, e^{\lambda(1-\xi)}$ и сохраним того, что во всех слагаемых действительные части показательных функций были неположительные в секторе R_2, то $\Delta(\lambda)$ ограничено снизу вне малой окрестности нулей λ_ν, $\nu = 1,2,\ldots,$ являющимися собственными значениями краевой задачи, положительными постоянными $N_\delta > 0$, и если из сектора R_2 выбросить внутренности малых кругов K_δ с центрами в нулях $\Delta(\lambda)$, получаем формулу

$$
G(x,\xi,\lambda) = O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right), \qquad |\lambda| \to \infty, \tag{12}
$$

Такая оценка справедлива и в остальных секторах $R_j, \ j \neq 2$, в чем можно убедиться, проводя аналогичные преобразования.

Для корней λ_{vk} характеристического определителя $\Delta(\lambda)$ в секторах R_k справедлива оценка $\left|\lambda_{v+1,k} - \lambda_{v,k}\right| \geq M, \ M > 0$. Возьмем окружности K_δ радиуса δ с центрами в λ_{vk}. Рассмотрим замкнутые расширяющиеся контуры q_v, которые не пересекаются с K_δ Тогда используя асимптотические представления функции Грина и представляя q_v как сумму частей, расположенных в R_j, имеем

$$\int_{q_v} \lambda^3 d\lambda \int_0^1 G(x,\xi,\lambda)h(\xi)d\xi = \sum_{R_j} \int_{q_v \cap R_j} \lambda^3 d\lambda \int_0^1 \frac{\Delta_0(x,\xi,\lambda)}{\Delta(\lambda)} h(\xi)d\xi.$$

Применяя методику работы [3, стр. 218-221], [4] приходим к следующей теореме.

Теорема. Пусть функция $h(x)$ непрерывная. Тогда имеет место 4-кратное разложение по собственным и присоединенным функциям краевой задачи (1)-(2):

$$-\frac{1}{2\pi}\sum_v \int_{C_v} \lambda^s d\lambda \int_0^1 G(x,\xi,\lambda)h(\xi)d\xi = \begin{cases} h(x), & s = 3, \\ 0, & s < 3, \end{cases}$$

где C_v - простой замкнутый контур, окружающий только один полюс подынтегральной функции $\lambda^s \int_0^1 G(x,\xi,\lambda)h(\xi)d\xi,$ сумма по v распространена на все полюсы.

Список литературы / References

1. *Шкаликов А.А.* Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Труды семинара имени И.Г.Петровскую, 1983. № 1, вып. 9. С. 190-229.
2. *Зульфугарова Р.Т.* О смешанных задачах для волнового уравнения содержащих в граничных условиях производные по времени // Journal of Cont. Appl. Math., 2015. V. 5. № 1. C. 29-34.
3. *Расулов М.Л.* Применение вычетного метода к решению задач дифференциальных уравнений. Баку. Элм, 1989. 328 с.
4. *Расулов М.Л.* Формула разложения в случае спектральной задачи, содержащей в граничных условиях производных более высоких порядков, чем в уравнении // Дифференциальные уравнения, 1982. № 2. С. 2149-2166.