ДЕКОМПОЗИЦИЯ ДИСКРЕТНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С МАЛЫМ ШАГОМ НА ИНТЕГРАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

Аширбаев Б.Ы. Email: Ashirbayev1788@scientifictext.ru

Ашırбаев Бейшембек Ыбышевич – кандидат физико-математических наук, доцент,
кафедра прикладной математики и информатики,
Кыргызский государственный технический университет им. И. Раззакова, г. Бишкек, Кыргызская Республика

Аннотация: *при решении задач управления объектами из различных областей науки и техники возникают сложности, обусловленные высокой размерностью моделей и наличием нескольких временных масштабов. В связи с этим возникает необходимость разделения переменных состояния в задачах оптимального управления. В статье методом интегральных многообразий [1] дискретная задача оптимального управления с малым шагом подразделена на две подзадачи, решения которых находятся независимо друг от друга. Алгоритмы приближенных решений подзадач построены на основе второго метода Ляпунова [2]. Данная работа является продолжением исследований работ [3, 4] дискретной задачи оптимального управления с малым шагом.*

Ключевые слова*: малый шаг. Матрица простой структуры. Декомпозиция линейной дискретной системы. Уравнения Риккати. Уравнения Ляпунова. Интегральные многообразия. Функции Ляпунова. Первая разность.*

DECOMPOSITION OF DISCRETE OPTIMAL CONTROL PROBLEM WITH A SMALL STEP ON THE INTEGRAL MANIFOLDS

Ashirbayev B.Y. Email: Ashirbayev1788@scientifictext.ru

Ashirbayev Beyshembek Ybyshevich - cand. p-m. Sc., Associate Professor,
DEPARTMENT OF APPLIED MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE,
KYRGYZ STATE TECHNICAL UNIVERSITY I. RAZZAKOVA, BISHKEK, REPUBLIC OF KYRGYZSTAN

Abstract: *in solving the object management tasks from various fields of science and technology there are difficulties due to the high dimensionality of the model and the presence of multiple time scales. In this connection there is need for the separation of state variables in optimal control problems. In the article the method of integral manifolds [1] discrete optimal control problem with a small step subdivided into two sub-tasks, the solution of which is independently from each other. Algorithms for the solution of subtasks are based on the second method of Lyapunov [2]. This work is a continuation of research works [3, 4] the discrete optimal control problem with a small step.*

Keywords: *small step. Simple structure matrix. Decomposition of a linear discrete system. Riccati equation. Lyapunov equations. Integral manifolds. Lyapunov functions. The first difference.*

УДК 517.977.58: 517.925.53

Пусть задана линейная дискретная система с малым шагом

$$x(t+T) = A_1x(t) + A_2z(t) + B_1u(t), \qquad x(0) = x_0, \quad (1)$$
$$z(t+T) = A_3x(t) + A_4z(t) + B_2u(t), \qquad z(0) = z_0,$$

где $x, z \in R^n$, $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$, $A_i \ (i = \overline{1,4}) - (n \times n)$, B_1, $B_2 - (n \times r) -$ постоянные матрицы, $u = u(t) - r$ –мерный вектор управления, $t = kT$, $k = 0, 1, \cdots \infty$, $T -$ малый шаг, $0 < T \leq 1$.

Требуется найти оптимальное управление $u^* = u^*(t)$, которое минимизирует критерий качества

$$J = \sum_{k=0}^{\infty}[u^{'}(kT)u(kT) + x^{'}(kT)L_1x(kT) + z^{'}(kT)L_2z(kT)], \qquad (2)$$

где $L_1 > 0$, $L_2 > 0 -$ симметрические постоянные матрицы, штрих обозначает транспонирование.

Потребуем выполнения следующих условий:

I. Матрицы $A_i \ (i = \overline{1,4})$ являются матрицами простой структуры и они не имеют нулевого собственного значения $\lambda_i \ (i = \overline{1,n})$.

II. Матрицы $A_i \ (i = \overline{1,4})$ устойчивы т.е., все собственные значения λ_i матрицы A_i удовлетворяют неравенствам:

$$|\lambda_i| < q_0 < 1, \ \ \lambda_i + \lambda_j \neq 0, \ \ i \geq 1, \ j \leq n.$$

При выполнении условии I, как показано в [3, с. 25-31] систему (1) можно разделить на две подсистемы меньшего порядка вида:

$$\tilde{x}(t+T) = \tilde{A}_1\tilde{x}(t) + \tilde{B}_1u(t), \qquad (3)$$
$$\tilde{z}(t+T) = \tilde{A}_4\tilde{z}(t) + \tilde{B}_2u(t), \qquad (4)$$

где

$$\tilde{A}_1 = A_1 + A_2H, \quad \tilde{A}_4 = A_4 - HA_2, \quad \tilde{B}_1 = B_1 + N\tilde{B}_2, \quad \tilde{B}_2 = -HB_1 + B_2. \qquad (5)$$

При условии, что матрицы H и N удовлетворяют следующим матричным уравнениям Риккати и Ляпунова соответственно:

$$-HA_1 + A_4H - HA_2H + A_3 = 0, \qquad (6)$$
$$-\tilde{A}_1N + N\tilde{A}_4 + A_2 = 0. \qquad (7)$$

Начальные условия системы (3) и (4) принимают вид:

$$\tilde{x}(0) = \tilde{x}_0, \quad \tilde{z}(0) = \tilde{z}_0, \qquad (8)$$

где $\tilde{x}_0 = x_0 + N\tilde{z}_0, \quad \tilde{z}_0 = z_0 - Hx_0$.

Теперь рассмотрим задачу декомпозиции (2) – (4). Известно нам, что при выполнении условий II системы (3) и (4) имеют интегральные многообразия [1, с. 15-26, 4, с. 79-84]:

$$z = H\tilde{x}, \quad x = -N\tilde{z}. \qquad (9)$$

Представим интегральные многообразия (9) в виде:

$$\theta_\nu = \{(\tilde{x}', H\tilde{x}) |\, \tilde{x} = x \in R^n, z = H\tilde{x}, z \in R^n\}, \qquad (10)$$
$$\theta_\sigma = \{((-N\tilde{z})', \tilde{z}) |\, x = -N\tilde{z} \in R^n, \qquad z \in R^n\}.$$

Определим из столбцов матрицы B_1 и B_2 следующие векторы:

$$b_j^{(1)} = \begin{pmatrix} b_{1i}^{(1)} & b_{2i}^{(1)} & \cdots & b_{ni}^{(1)} \end{pmatrix}', \quad b_j^{(2)} = \begin{pmatrix} b_{1i}^{(2)} & b_{2i}^{(2)} & \cdots & b_{ni}^{(2)} \end{pmatrix}',$$

$j = \overline{1, n}, \ i = \overline{1, r}$, где $b_j^{(1)}, \ b_j^{(2)} -$ элементы матриц B_1 и B_2.

Пусть выполняются условия

$$\left(\tilde{b}_j^{(1)'}, H\tilde{b}_j^{(1)}\right) \in \theta_\nu, \quad \left(\left(-N\tilde{b}_j^{(2)}\right)', \tilde{b}_j^{(2)}\right) \in \theta_\sigma, \qquad (11)$$

где $\tilde{b}_j^{(1)} = b_j^{(1)} + N\tilde{b}_j^{(2)} \quad \tilde{b}_j^{(2)} = b_j^{(2)} - Hb_j^{(1)}$,

$$\tilde{b}_j^{(1)} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_{1i}^{(1)} & \tilde{b}_{2i}^{(1)} & \cdots & \tilde{b}_{ni}^{(1)} \end{pmatrix}', \quad \tilde{b}_j^{(2)} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_{1i}^{(2)} & \tilde{b}_{2i}^{(2)} & \cdots & \tilde{b}_{ni}^{(2)} \end{pmatrix}'$$

Тогда исходная задача сводится к независимому синтезу регуляторов в системах (3), (4). При этом управление $u(t)$ можно определить в форме

$$u(t) = \begin{cases} -\tilde{B}_1' K_\nu \tilde{x}(t), \ \tilde{x} \in R^n, \\ -\tilde{B}_2' K_\sigma \tilde{z}(t), \ \tilde{z} \in R^n, \end{cases} \qquad (12)$$

где $K_\nu, \ K_\sigma - (n \times n)$ матрицы усиления, которые подлежат определению.

Теперь задачу (1), (2) представим в виде следующих две подзадач, решения которых находятся независимо друг от друга:

$$J_\nu = \sum_{k=0}^{\infty} [u'(kT)u(kT) + \tilde{x}'(kT)L_\nu \tilde{x}(kT)] \to min, \qquad (13)$$
$$\tilde{x}(t+T) = \tilde{A}_1\tilde{x}(t) + \tilde{B}_1u(t), \ \tilde{x}(0) = \tilde{x}_0, \ z = H\tilde{x}, \ \tilde{x} = x, \qquad (14)$$

где $L_\nu = L_1 + H'L_2H$ и

$$J_\sigma = \sum_{k=0}^{\infty} [u'(kT)u(kT) + \tilde{z}'(kT)L_\sigma \tilde{z}(kT)] \to min, \qquad (15)$$
$$\tilde{z}(t+T) = \tilde{A}_4\tilde{z}(t) + \tilde{B}_2u(t), \ \tilde{z}(0) = \tilde{z}_0, \ x = -N\tilde{z}, \ \tilde{z} = z, \qquad (16)$$

где $L_\sigma = N'L_1N + (E_n - HN)'L_2(E_n - HN)$.

При построении решений задачи (13) - (16) используем метод Ляпунова [2, с. 320-410]. Для данной задачи функции Ляпунова имеют вид:

$$V(\tilde{x}, t) = \tilde{x}'(t)P\tilde{x}(t), \qquad G(\tilde{z}, t) = \tilde{z}'(t)Q\tilde{z}(t), \qquad (17)$$

где P и $Q-$ положительно определенные матрицы. Тогда первые разности функции (17) соответственно можно записать в виде:

$$\Delta V(\tilde{x}, t) = V[\tilde{x}(t+T)] - V[\tilde{x}(t)], \qquad (18)$$
$$\Delta G(\tilde{z}, t) = G[\tilde{z}(t+T)] - G[\tilde{z}(t)]. \qquad (19)$$

Сначала рассмотрим задачу (13), (14). Согласно методу Ляпунова первая разность функции Ляпунова должна быть отрицательна определенной. Объединив условие отрицательной определенности первой разности функции Ляпунова (18) с функционалом (13) полагаем

$$\tilde{x}'(t+T)P\tilde{x}(t+T)P - \tilde{x}'(t)P\tilde{x}(t) =$$
$$= -[u'(t)u(t) + \tilde{x}'(t)L_\nu\tilde{x}(t)]. \qquad (20)$$

С учетом (12), (14) из (20) имеем

$$\tilde{x}'(t)\left[\tilde{A}_1'P\tilde{A}_1 - \tilde{A}_1'P\tilde{B}_1\tilde{B}_1'K_\nu - K_\nu'\tilde{B}_1\tilde{B}_1'P\tilde{A}_1 + K_\nu'\tilde{B}_1\tilde{B}_1'P\tilde{B}_1\tilde{B}_1'K_\nu - P\right]\tilde{x}(t) =$$
$$= -\tilde{x}'(t)[K_\nu'\tilde{B}_1\tilde{B}_1'K_\nu + L_\nu]\tilde{x}(t). \qquad (21)$$

При любом $\tilde{x}(t)$ из (21) получаем

$$P = \tilde{A}_1'P\tilde{A}_1 - \tilde{A}_1'P\tilde{B}_1\tilde{B}_1'K_\nu - K_\nu'\tilde{B}_1\tilde{B}_1'P\tilde{A}_1 + K_\nu'\tilde{B}_1\tilde{B}_1'P\tilde{B}_1\tilde{B}_1'K_\nu, \qquad (22)$$
$$K_\nu'\tilde{B}_1\tilde{B}_1'K_\nu + L_\nu = 0. \qquad (23)$$

Аналогично для задачи (15), (16) из условия

$$\tilde{z}'(t+T)Q\tilde{z}(t+T)Q - \tilde{z}'(t)Q\tilde{z}(t) =$$
$$= -[u'(t)u(t) + \tilde{z}'(t)L_\sigma\tilde{z}(t)] \qquad (24)$$

с учетом (12), (16) из (24) получаем

$$\tilde{z}'(t)\left[\tilde{A}_4'Q\tilde{A}_4-\tilde{A}_4'Q\tilde{B}_2\tilde{B}_2'K_\sigma-K_\sigma'\tilde{B}_2\tilde{B}_2'Q\tilde{A}_4+K_\sigma'\tilde{B}_2\tilde{B}_2'Q\tilde{B}_2\tilde{B}_2'K_\sigma-Q\right]\tilde{z}(t)=$$
$$=-\tilde{z}'(t)[K_\sigma'\tilde{B}_2\tilde{B}_2'K_\sigma+L_\sigma]\tilde{z}(t). \qquad (25)$$

При любом $\tilde{z}(t)$ из (25) имеем

$$Q=\tilde{A}_4'Q\tilde{A}_4-\tilde{A}_4'Q\tilde{B}_2\tilde{B}_2'K_\sigma-K_\sigma'\tilde{B}_2\tilde{B}_2'Q\tilde{A}_4+K_\sigma'\tilde{B}_2\tilde{B}_2'Q\tilde{B}_2\tilde{B}_2'K_\sigma, \qquad (26)$$
$$K_\sigma'\tilde{B}_2\tilde{B}_2'K_\sigma+L. \qquad (27)$$

Теорема. *Пусть выполняются условия II, (11), (20) и (24). Тогда в интегральных многообразиях (10) существуют управления (12) для системы (14) и (16), которые соответственно минимизируют функционалы (13) и (15), причем их минимальные значения определяются как*

$$minJ_\nu=\tilde{x}'(0)P\tilde{x}(0), \qquad (28)$$
$$minJ_\sigma=\tilde{z}'(0)Q\tilde{z}(0). \qquad (29)$$

При этом оптимальные управления задачи (13), (14) и (15), (16) определяются соответственно функциями:

$$u_\nu(t)=-\tilde{B}_1'K_\nu\tilde{x}(t), \qquad (30)$$
$$u_\sigma(t)=-\tilde{B}_2'K_\sigma\tilde{z}(t). \qquad (31)$$

Доказательство. Сначала докажем теорему для задачи (13), (14). Для того чтобы минимизировать функционал (13), находим суммы:

$$\textstyle\sum_{k=0}^{\infty}\Delta V[\tilde{x},kT]=\sum_{k=0}^{\infty}\{V[\tilde{x}((k+1)T)]-V[\tilde{x}(kT)]\}, \qquad (32)$$
$$\textstyle\sum_{k=0}^{\infty}\Delta V[\tilde{x},kT]=\tilde{x}'(N)P\tilde{x}(N)-\tilde{x}'(0)P\tilde{x}(0). \qquad (33)$$

С учетом (12) и (14) из (32) имеем

$$\textstyle\sum_{k=0}^{\infty}\Delta V[\tilde{x},kT]=\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{x}'(kT)\left[K_\nu'\tilde{B}_1\tilde{B}_1'K_\nu+L_\nu+\tilde{A}_1'P\tilde{A}_1-\tilde{A}_1'P\tilde{B}_1\tilde{B}_1'K_\nu--K_\nu'\tilde{B}_1\tilde{B}_1'P\tilde{A}_1+K_\nu'\tilde{B}_1\tilde{B}_1'P\tilde{B}_1\tilde{B}_1'K_\nu-P\right]\tilde{x}(kT). \qquad (34)$$

Сравнивая правые части (33) и (34), получим равенство

$$\textstyle\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{x}'(kT)\left[K_\nu'\tilde{B}_1\tilde{B}_1'K_\nu+L_\nu+\tilde{A}_1'P\tilde{A}_1-\tilde{A}_1'P\tilde{B}_1\tilde{B}_1'K_\nu-K_\nu'\tilde{B}_1\tilde{B}_1'P\tilde{A}_1++K_\nu'\tilde{B}_1\tilde{B}_1'P\tilde{B}_1\tilde{B}_1'K_\nu-P\right]\tilde{x}(kT)-\tilde{x}'(N)P\tilde{x}(N)+\tilde{x}'(0)P\tilde{x}(0)=0. \qquad (35)$$

Добавляя теперь, к функционалу (13) левую часть равенства (35) получаем

$$J=\textstyle\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{x}'(kT)[K_\nu'\tilde{B}_1\tilde{B}_1'K_\nu+L_\nu]\tilde{x}(kT)+\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{x}'(kT)\left[K_\nu'\tilde{B}_1\tilde{B}_1'K_\nu+L_\nu++\tilde{A}_1'P\tilde{A}_1-\tilde{A}_1'P\tilde{B}_1\tilde{B}_1'K_\nu-K_\nu'\tilde{B}_1\tilde{B}_1'P\tilde{A}_1+K_\nu'\tilde{B}_1\tilde{B}_1'P\tilde{B}_1\tilde{B}_1'K_\nu-P\right]\tilde{x}(kT)--\tilde{x}'(N)P\tilde{x}(N)+\tilde{x}'(0)P\tilde{x}(0). \qquad (36)$$

При выполнении условий (23) и

$$\lim_{N\to\infty}\tilde{x}'(N)P\tilde{x}(N)=0 \qquad (37)$$

и с учетом (22) из (36) получаем (28).

Аналогично для задачи (15), (16) имеем:

$$\textstyle\sum_{k=0}^{\infty}\Delta G[\tilde{z},kT]=\sum_{k=0}^{\infty}\{G[\tilde{z}((k+1)T)]-G[\tilde{z}(kT)]\}, \qquad (38)$$
$$\textstyle\sum_{k=0}^{\infty}\Delta G[\tilde{z},kT]=z'(N)Q\tilde{z}(N)-\tilde{z}'(0)Q\tilde{z}(0). \qquad (39)$$

Тогда с учетом (12) и (16) из (38) имеем

$$\textstyle\sum_{k=0}^{\infty}\Delta G[\tilde{z},kT]=$$
$$\textstyle\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{z}'(kT)\left[K_\sigma'\tilde{B}_2\tilde{B}_2'K_\sigma+L_\sigma+\tilde{A}_4'Q\tilde{A}_4-\tilde{A}_4'Q\tilde{B}_2\tilde{B}_2'K_\sigma--K_\sigma'\tilde{B}_2\tilde{B}_2'P\tilde{A}_4+K_\sigma'\tilde{B}_2\tilde{B}_2'Q\tilde{B}_2\tilde{B}_2'K_\sigma-Q\right]\tilde{z}(kT). \qquad (40)$$

Сравнивая правые части (39) и (40), получаем

$$\textstyle\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{z}'(kT)\left[K_\sigma'\tilde{B}_2\tilde{B}_2'K_\sigma+L_\sigma+\tilde{A}_4'Q\tilde{A}_4-\tilde{A}_4'Q\tilde{B}_2\tilde{B}_2'K_\sigma-K_\sigma'\tilde{B}_2\tilde{B}_2'Q\tilde{A}_4++K_\sigma'\tilde{B}_2\tilde{B}_2'Q\tilde{B}_2\tilde{B}_2'K_\sigma-Q\right]\tilde{z}(kT)-\tilde{z}'(N)Q\tilde{z}(N)+\tilde{z}'(0)Q\tilde{z}(0)=0. \qquad (41)$$

Добавляя к функционалу (15) левую часть равенства (41), получаем

$$J=\textstyle\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{z}'(kT)[K_\sigma'\tilde{B}_2\tilde{B}_2'K_\sigma+L_\sigma]\tilde{z}(kT)+\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{z}'(kT)\left[K_\sigma'\tilde{B}_2\tilde{B}_2'K_\sigma+L_\sigma++\tilde{A}_4'Q\tilde{A}_4-\tilde{A}_4'Q\tilde{B}_2\tilde{B}_2'K_\sigma-K_\sigma'\tilde{B}_2\tilde{B}_2'Q\tilde{A}_4+K_\sigma'\tilde{B}_2\tilde{B}_2'Q\tilde{B}_2\tilde{B}_2'K_\sigma-Q\right]\tilde{z}(kT)--\tilde{z}'(N)Q\tilde{z}(N)+\tilde{z}'(0)Q\tilde{z}(0). \qquad (42)$$

При выполнении условий (27) и

$$\lim_{N\to\infty}\tilde{z}'(N)Q\tilde{z}(N)=0 \qquad (43)$$

и с учетом (26) из (42) получаем (29), ч. т. д.

Список литературы / References

1. *Стрыгин В.В., Соболев В.А.* Разделение движений методом интегральных многообразий. М: Наука, 1988. 256 с.
2. *Андреев Ю.Н.* Управление конечномерными линейными объектами. М: Наука, 1976. 424 с.
3. *Иманалиев З.К., Аширбаев Б.Ы.* Алгоритм решения линейного матричного разностного уравнения с малым шагом // Проблемы современной науки и образования, 2016. № 8 (50). С. 8-10.
4. *Аширбаев Б.Ы.* Декомпозиция и алгоритм решения задач оптимального управления с малым шагом // Известия КГТУ им. И. Раззакова, 2016. № 3 (39). С. 25-31.
5. *Иманалиев З.К., Аширбаев Б.Ы.* Декомпозиция задач оптимального управления с сингулярными возмущениями на интегральных многообразиях // Известия КГТУ им. И. Раззакова, 2007. № 11. С. 79 – 84.