A CLOSED SET WITH EMPTY INTERIOR (IN PARTICULAR, CANTOR'S SET) AS A SINGULAR SET OF FUNCTIONS

Silchenko E.[1], Zolotukhina V.[2]

ЗАМКНУТОЕ МНОЖЕСТВО С ПУСТОЙ ВНУТРЕННОСТЬЮ (В ЧАСТНОСТИ КАНТОРОВО МНОЖЕСТВО) КАК СИНГУЛЯРНОЕ МНОЖЕСТВО ФУНКЦИИ

Сильченко Е. Б.[1], Золотухина В. Г.[2]

[1]Сильченко Евгений Борисович / Silchenko Evgeniy – аспирант;
[2]Золотухина Вера Геннадьевна / Zolotukhina Vera – старший лаборант,
кафедра теории функций, факультет математики и компьютерных наук,
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
Кубанский государственный университет, г. Краснодар

Аннотация: *в статье сообщается, что в метрическом пространстве для каждого не содержащего изолированных точек замкнутого множества с пустой внутренностью существует функция, для которой данное множество является сингулярным множеством (множество сингулярных точек функции называют сингулярным множеством; точка называется сингулярной для функции, если в любой окрестности этой точки функция является неограниченной); в качестве примера строится функция, для которой множеством сингулярных точек является канторово множество. Предъявляется доказательство, что эта функция – подходящая.*

Abstract: *in this article we report that in any metric space for any closed set with empty interior, which does not contain isolated points, there is a function for which the given set is the singular set (set of singular points is called the singular set; the point is called singular for the function, if in any neighbourhood of this point the function is unlimited); As the example we construct the function for which the set of singular points is the Cantor set. We present the proof that this function is suitable.*

Ключевые слова: *сингулярные точки, сингулярное множество функции, канторово множество.*
Keywords: *singular points, singular set functions, Cantor set.*

Утверждение. Пусть X — метрическое пространство. Если подмножество $A \subseteq X$ замкнутое, имеет пустую внутренность $\operatorname{int} A = \varnothing$, а также не содержит изолированных точек пространства X, тогда существует функция $f: X \to \mathbb{R}$ такая, что множество A является множеством сингулярных точек f.

Доказательство.

Доказательство восходит к доказательству утверждения 3 из [1].

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in A; \\ \dfrac{1}{\rho(x, A)}, & x \notin A. \end{cases}$$

Покажем, что множество A является множеством сингулярных точек функции f.

Так как внутренность $\operatorname{int} A = \varnothing$, то всякая точка $a \in A$ является точкой прикосновения дополнения $X \setminus A$. Из этого по определению следует, что $\forall \delta > 0$ в δ-окрестности точки a найдется точка $x \in X \setminus A$. При этом будем иметь $f(x) = \dfrac{1}{\rho(x, A)} > \dfrac{1}{\delta}$. Для любых $\varepsilon > 0$ и $M > 0$ можно подобрать $\delta > 0$ так, чтобы выполнялись неравенства $\delta < \varepsilon$ и $\dfrac{1}{\delta} > M$, то есть $x \in O_\varepsilon(a)$ и $f(x) > M$. Для этого достаточно взять $\delta = \min\left\{\varepsilon, \dfrac{1}{M}\right\}$. Таким образом, точка a является сингулярной точкой f.

Проверим, что точка $b \notin A$ не может быть сингулярной точкой f.

Если $b \notin A$, то $\rho(b, A) = \mu > 0$ ввиду замкнутости A. Положим $\delta = \frac{\mu}{2}$ и покажем, что $\forall x \in O_\delta(b)$ $\rho(x, A) \geq \frac{\mu}{2}$. Допустим противное: $\rho(x, A) < \frac{\mu}{2}$. Тогда найдется точка $a' \in A$ такая, что $\rho(x, a') < \frac{\mu}{2}$. Из неравенства треугольника следует $\rho(b, a') \leq \rho(b, x) + \rho(x, a') < \frac{\mu}{2} + \frac{\mu}{2} = \mu$, что противоречит равенству $\rho(b, A) = \mu$. Итак, $\forall x \in O_\delta(b)$ верна оценка $f(x) = \frac{1}{\rho(x, A)} \leq \frac{2}{\mu}$. Таким образом, b есть регулярная точка f.

Можно дополнительно отметить, что функция f непрерывна на $X \setminus A$ ввиду непрерывности метрики ρ.

Пример. Функция, сингулярное множество которой есть канторово множество $C \subset [0,1]$.

Каждому числу $x \in [0,1)$ может быть поставлена в соответствие его запись в троичной системе счисления вида $x = 0, a_1 a_2 \cdots a_n \cdots$, где $a_i \in \{0,1,2\}$, и обратно, каждой такой записи при условии, что сколь угодно далеко встречаются цифры, отличные от 2, соответствует некоторое число из $[0,1)$.

Точкам канторова множества на $[0,1)$ отвечают троичные записи, в которых цифра 1 не встречается либо встречается единожды и после нее следуют цифры 0.

Определим функцию $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ следующим образом.

Если $x \in C \subset [0,1]$, то полагаем $f(x) = 0$.

Если $x \in [0,1] \setminus C$, то в троичной записи числа x рано или поздно встретится цифра 1. В этом случае полагаем $f(x)$ равным номеру позиции первого вхождения цифры 1 в записи числа x.

Покажем, что C является множеством сингулярных точек функции f.

Проверим, что каждая точка C является сингулярной для f.

Пусть $c \in C$. Тогда в троичной записи числа c цифра 1 не встречается либо встречается единожды и после нее следуют только цифры 0.

Для любого натурального n можно построить число x_n, троичная запись которого совпадает с записью числа c до позиции n, а начиная с позиции n, стоит пара цифр 11, после которых следуют цифры 0.

Всякое такое число x_n не принадлежит C, то есть принадлежит $[0,1] \setminus C$, и удовлетворяет равенству $\left| c - x_n \right| < \frac{1}{3^{n-1}}$.

Таким образом, для любых $\varepsilon > 0$ и M в ε-окрестности точки $c \in C$ найдется число $x_n \in [0,1] \setminus C$ такое, что $f(x_n) = n > M$. Для этого достаточно взять $n > \max\left\{1 + \log_3 \frac{1}{\varepsilon},\ M\right\}$.

Убедимся, что каждая точка $[0,1] \setminus C$ является регулярной для f.

Пусть $d \in [0,1] \setminus C$. Тогда в троичной записи числа d встречается цифра 1, причем после нее встречается хотя бы одна цифра, отличная от 0.

Пусть n — номер позиции первого вхождения цифры 1 в троичной записи числа d. Возьмем число a такое, что его троичная запись до позиции n включительно совпадает с записью числа d, а далее следуют цифры 0. Очевидно, что $a < d$.

Как было ранее отмечено, в троичной записи любого числа сколь угодно далеко встречаются цифры, отличные от 2. Пусть m — номер позиции первой цифры в троичной записи числа d, отличной от 2 и следующей после первой цифры 1. Возьмем число b такое, что его троичная запись совпадает с записью числа d до позиции m, а на позиции m стоит цифра 2, после которой следуют цифры 0. Очевидно, что $d < b$.

Если $x \in (a,b)$, то x лежит между числами вида $a = 0,\ldots\underset{n}{\boxed{1}}000\ldots$ и $b = 0,\ldots\underset{n}{\boxed{1}}2\ldots\underset{m}{\boxed{2}}000\ldots$, поэтому троичная запись числа x имеет вид $x = 0,\ldots\underset{n}{\boxed{1}}\ldots$, причем после цифры 1 встречаются цифры, отличные от 0. Из этого следует, что $x \in [0,1] \setminus C$ и $f(x) = n$. Таким образом, мы нашли окрестность (a,b) числа d, в которой функция f ограничена.

Литература

1. *Сильченко Е. Б., Золотухина В. Г.* Сингулярные множества функций // Проблемы современной науки и образования № 21 (63), 2016. С. 27-29. [Электронный ресурс]. Научная электронная библиотека. Режим доступа: http://elibrary.ru/item.asp?id=26477093/ (дата обращения: 13.01.2017).