СУЩЕСТВОВАНИЕ И МЕСТОПОЛОЖЕНИЕ СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ ДИСКРЕТНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА

Лакаев Ш.С. Email: Lakaev17106@scientifictext.ru

Лакаев Шухрат Саидахмадович - ассистент,
кафедра высшей математики,
Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства,
г. Ташкент, Республика Узбекистан

Аннотация: *как известно, в физике устойчивые сложные объекты образуются с помощью сил притяжения, которые позволяют составным частям уменьшить их энергию, связывая их вместе. Отталкивающие силы отделяют частицы на свободном пространстве. Как известно, в непрерывном случае, с помощью отделения движения центра масс, двухчастичная проблема сводится к изучению одночастичного оператора Шредингера, которая фактически не зависит от полного импульса двух частиц. Рассматривается семейство дискретных операторов Шредингера* $h_\mu(k), k \in T^1$, *ассоциированное гамильтонианом* $\boldsymbol{h_\mu}$ *системы двух квантовых частиц, движущихся на одномерной решетке* Z^1 *и взаимодействующих с помощью парного контактного потенциала отталкивания* $\mu > 0$. *Доказывается, что для любых* $\mu > 0$ *и* $k \in T^1$ *оператор имеет единственное собственное значение* $z(\mu, k)$, $k \in T^1$ *, лежащее правее существенного спектра.*

Ключевые слова: *гильбертово пространство, оператор Шредингера, квантовых частиц, собственное значение, спектр.*

THE EXISTENCE AND LOCATION OF AN EIGENVALUEDISCRETE SCHRÖDINGER OPERATOR

Lakaev Sh.S.

Lakaev Shukhrat Saidahmadovich - assistant,
Chair of Higher Mathematics
Tashkent Institute of Irrigation Engineers and mechanization of agriculture
Tashkent, Republic of Uzbekistan

Abstract: *as you know, in physics, stable complex objects are formed with the help of attractive forces that allow the constituent parts to reduce their energy by binding them together. Repulsive forces separate particles in free space. As is known, in the continuous case, by separating the motion of the center of mass, the two-particle problem reduces to the study of the single-particle Schrödinger operator, which in fact does not depend on the total momentum of the two particles*
We consider a family of discrete Schrödinger operators $h_\mu(k), k \in T^1$ *associated with a system of two quantum particles moving on the one-dimensional lattice* Z^1 *and interacting with the pairwise contact repulsive potential* *μ> 0, which is associated with the Hamiltonian* $\boldsymbol{h_\mu}$. *It is proved that for any μ> 0 and* $k \in T^1$ *the operator has a unique eigenvalue z (μ, k),* $k \in T^1$*lying to the right of the essential spectrum.*

Keywords: *hilbert space, Schrödinger operator, quantum particles, eigenvalue, spectrum.*

УДК3054

Дискретный оператор Шредингера $h_\mu(k), k \in T^1$. Пусть T^1 −одномерной тор, т.е. отрезок $[-\pi, \pi]$ с отождествленными концами. Он рассматривается как абелева группа, в которой операции сложения и умножения на вещественное число введены как операции сложения и умножения на вещественное число в R^1 по модулю $(2\pi Z)^1$, $d\tau -$ нормированная мера Хаара, введенная на Торе T^1.

Пусть $L_2(T^1, d\tau)$ −гильбертово пространство квадратично-интегрируемых функций, определенных на T^1 и $L_2^e(T^1) \subset L_2(T^1, d\tau) -$ подпространство четных функций.

Семейство двухчастичных операторов Шредингера $h_\mu(k), k \in T^1$, соответствующих системе двух частиц на решетке с контактным потенциалом отталкивания, действует в пространстве $L_2^e(T^1)$ по формуле:

$$h_\mu(k) = h_0(k) + \mu V,$$

где невозмущенный оператор $h_0(k)$ является оператором умножения на функцию

$$E(k, q) = 1 - \cos\frac{k}{2} cosq \ , k, q \in T^1, \qquad (1)$$

а возмущающий оператор V −интегральный оператор ранга один

$$(Vf)(q) = \int_{T^1} f(q) d\tau \, , \ f \in L_2^e(T^1)$$

Здесь $\mu \in R_+ \equiv (0,+\infty)$ − энергия взаимодействия двух частиц.

По теореме Вейля о существенном спектре [1], существенный спектр $\sigma_{ess}(h_\mu(k))$ оператора $h_0(k)$. Следовательно,

$\sigma_{ess}\left(h_\mu(k)\right) = \sigma_{ess}\left(h_0(k)\right) = [E_{min}(k), E_{max}(k)]$,

где $E_{min}(k)$=$min_{q\epsilon T^1}E(k,q)$=$1-cos\frac{k}{2} \geq 0$, (k)=$max_{q\epsilon T^1}E(k,q)$=$1$+$cos\frac{k}{2} \leq 2$

Формулировка основных результатов. В следующей теореме доказано существование единственного собственного значения $z(\mu,k)$.

Теорема . *При всех* $\mu \in R_+$*и* $k \in T^1$*оператор* $h_\mu(k)$ *имеет единственное собственное значения* $z(\mu,k)$. *При этом* $z(\mu,k)$ *лежит правее существенного спектра* $\sigma_{ess}\left(h_\mu(k)\right)$.

Для любого $k \in T^1$ *функция* $z(\cdot,k)$ *монотонно возрастает на* R_+ *и для любого* $\mu \in R_+$ *функция* $z(\mu,\cdot)$ *является четной, вещественно-аналитической функцией на* T^1. *При всех* $k \in T^1\backslash\{0\} = [-\pi,0) \cup (0,\pi]$ *выполняется неравенство*

$$z(\mu,k) < z(\mu,0)$$

Для любых $\mu \in R_+$ *и* $k \in T^1$ *собственная функция*

$$\varphi_{\mu,q}(\cdot) = \frac{\mu c}{z(\mu,k) - E(k,\cdot)} \qquad (2)$$

где $c \neq 0$*- нормирующий множитель, соответствующая собственному значению* $z(\mu,k)$, *аналитично на* T^1.

Дальнейшая часть работы посвящена доказательству этих результатов.

Определитель Фредгольма, ассоциированный оператору $h_\mu(k)$, $k \in T^1$.

В этом параграфе вводится определитель Фредгольма, ассоциированной оператором $h_\mu(k)$, $k \in T^1$ и, изучаются ряд его важные свойства (Леммы 1,2). Отметим что правый край существенного спектра $E_{max}(k)$, $k \in [-\pi,\pi]$ оператора $h_\mu(k)$ $k \in (-\pi,\pi)$ является особой точкой функции $\omega(k,z)$ и следовательно, определителя Фредгольма $\Delta_\mu(k,z)$.

Пусть C- комплексная плоскость. Для любого $k \in T^1$ определим определитель Фредгольма, ассоциированный оператором $h_\mu(k)$, как аналитическая функция, определенная в C\ $[E_{min}(k), E_{max}(k)]$, по формуле

$$\Delta_\mu(k,z) = 1 - \mu\omega(k,z), \qquad (3)$$

где

$$\omega(k,z)= \int_{T^1}\frac{d\tau}{z-E(k,q)}, \qquad (4)$$

Следующая лемма выражает связь между собственными значениями оператора $h_\mu(k)$ и нулями определителя Фредгольма.

Лемма 1. Для любого $k \in T^1$ точка $z \in$ C\ $[E_{min}(k), E_{max}(k)]$, является собственным значением оператора $h_\mu(k)$ тогда и только тогда, когда

$$\Delta_\mu(k,z) = 0.$$

Доказательство. Точка $z \in$ C\ $[E_{min}(k), E_{max}(k)]$ является собственным значением оператора $h_\mu(k)$ тогда и только тогда, когда уравнение

$\left(z - E_k(q)\right)\varphi(q) = \mu\int_{T^1}\varphi(t)d\tau(t)$

имеет решение $0 \neq \varphi \in L_2^e(T^1)$. Отсюда заключим, что собственная функция

$\varphi(\cdot) \equiv \varphi_{\mu,k}(\cdot)$ имеет следующий вид

$$\varphi_{\mu,k}(q) = \frac{\mu c}{z-E_k(q)}, \qquad (5)$$

где $c \equiv const \neq 0$ −нормирующий множитель.

Проинтегрировав обе части равенства (5), получим

$$c\Delta_\mu(k,z) = 0. \qquad (6)$$

Следовательно, уравнение (6) имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда $\Delta_\mu(k,z) = 0$.

Лемма 2. Для каждого $k \in T^1$ функция $\Delta_\mu(k,\cdot)$ непрерывна, монотонно возрастает в $(E_{max}(k),+\infty)$ и $\Delta_\mu(k,z) \to 1$ при $z \to +\infty$.

Доказательство. При каждом $k \in T^1$ функция $\Delta_\mu(k,z)$, как функция от z является аналитической непрерывной $z \in$ C\ $[E_{min}(k), E_{max}(k)]$ и производная по z является положительной. Следовательно, для каждого $k \in T^1$ функция $\Delta_\mu(k,\cdot)$ является непрерывной и монотонно возрастающей на $(E_{max}(k),+\infty)$. Заметим, что $\omega(k,z) \to 0$ при $z \to +\infty$.

Лемма 3. Для любых $k \in (-\pi,\pi)$ и $z \in (E_{max}(k),(E_{max}(k)+\delta)$ имеют место следующие разложения в виде сходящегося ряда:

$$\omega(k,z) = \sum_{n=-1}^{\infty} c_n(k)(z - E_{max}(k))^{\frac{n}{2}} \qquad (7)$$

где $(z - E_{max}(k))^{\frac{1}{2}} > 0$ при $z > E_{max}(k)$, $c_n(\cdot)$, n=0,1,2,…-регулярные функции в $(-\pi, \pi)$ и $c_{-1}(k)$= $\pi / \sqrt{cos\frac{k}{2}}$

Доказательство теоремы: Из леммы 3 и представления (3) определителя Фредгольма $\Delta_\mu(k,z)$ получим, что

$$\lim_{z\to E_{max}(k)} \Delta_\mu(k,z) = -\infty, \qquad \lim_{z\to+\infty} \Delta_\mu(k,z) = 1$$

Тогда из леммы 2 следует, что для любых $\mu \in R_+ u\ k \in T^1$, d=1 существует единственное число $z(\mu,k)$ $> E_{max}(k)$ такое, что имеет место $\Delta_\mu\big(k, z(\mu,k)\big) = 0$. Согласно лемме 1 число $z(\mu,k)$ является собственным значением оператора $h_\mu(k)$.

Список литературы / References

1. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 4: Анализ операторов. Мир. М., 1982.
2. *Лакаев С.Н., Холматов Ш.Ю.* Asymptotics of eigenvalues of two-particle Sho'ridenger operators on lattices with zero range interaction J. Phys. *A*, 44:13, 2011.
3. *Лакаев С.Н., Халхужаев А.М., Лакаев Ш.С.* Теоретическая и математическая физика. Том 171. № 3, 2012.