

**Periodic perturbations affecting a spacecraft on a Mars equatorial orbit from the waxing and waning of the polar caps of the planet
Shahan M.**

**Периодические возмущения, воздействующие на космический аппарат в экваториальной орбите Марса, вызванные увеличением и уменьшением полярных шапок планеты
Шахан М. Х.**

*Шахан Мухамедали Халиллуллаулы / Shahan Mukhamedali - магистрант,
кафедра космической техники и технологии,*

Евразийский национальный университет имени Л. Н. Гумилева, г. Астана, Республика Казахстан

Аннотация: в этой статье мы покажем, что периодические изменения коэффициента гравитации J_2 планеты вызывают на данном семействе экваториальных орбит малые периодические возмущения, и что эти возмущения можно измерить с помощью современных технологий. С этой целью мы сначала рассмотрим теорию Пуанкаре на уравнениях движений Ньютона. Затем, с помощью теории Флоке, мы показали, что в отличие от механизма возбуждения, возмущения являются непериодическими и что орбита не стабильна. Мы даем полную теорию на случай планеты Марс.

Abstract: we demonstrate in this paper that periodic variations of the J_2 gravity coefficient of a planet induce small cumulative perturbations on a given family of circular equatorial orbits, and that these perturbations could be measurable with current radiosciences technology. For this purpose, we first consider a Poincaré expansion of the Newtonian equations of motion. Then, by using Floquet's theory, we demonstrate that, unlike the excitation mechanism, the perturbations are nonperiodic, and that the orbit is not stable. We give the full theory to the case of planet Mars.

Ключевые слова: периодические возмущения, теорема Флоке, функция Якоби.

Keywords: periodic perturbations, Floquet's Theory, Jacobi function.

1. Основная часть

1.1 Обоснование

Чао и Рубинкам [1] показали, что гармоника J_2 Марса подвержена значительным годовым изменениям, поскольку приблизительно одна четвертая часть атмосферы углекислого газа на полярных шапках конденсируется в зимнее время и сублимируется в летнее время (рис. 1).

$$J_2(t) = J_2^0 + \Delta \cos(\omega t + \varpi)$$

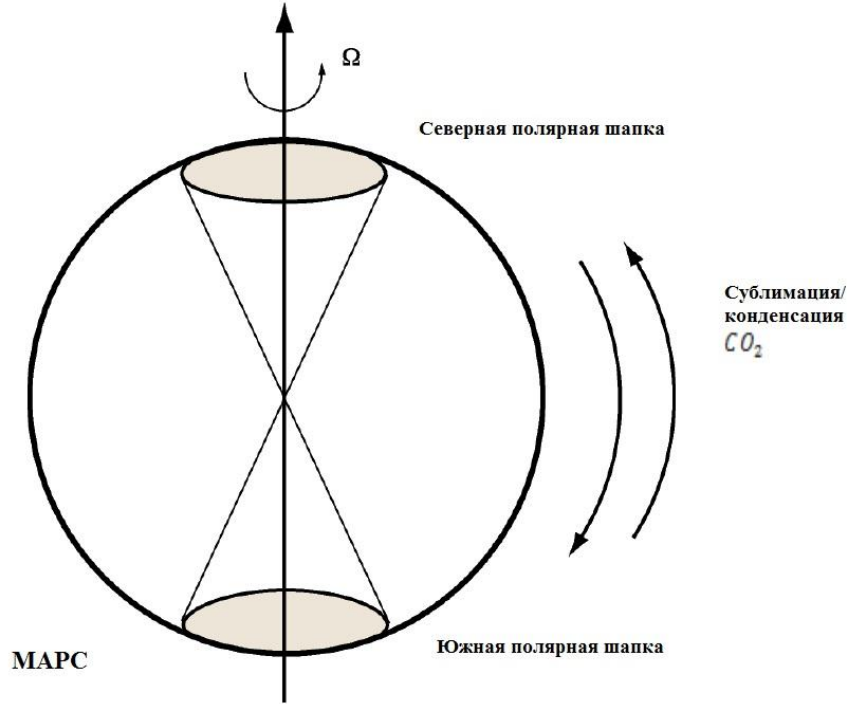


Рис 1. Модель песочных часов сублимации/конденсации на Марсе.

где $\Delta = \frac{3C_0\sigma\omega}{2MR^2\Omega_0}$, ϖ – произвольная фаза, σ – колебания долготы дня, C_0 – полярный момент инерции Марса, Ω_0 – угловая скорость вращения Марса, ω – угловая орбитальная скорость Марса, M – масса планеты, R – радиус Марса. В этой статье мы покажем, что эти небольшие изменения могут влиять на возмущения орбиты.

1.2. Орбитальная механика

Уравнение движения Ньютона космического зонда, вращающегося вокруг планеты, в декартовой системе координат имеет вид

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -\mu \frac{x}{r^3} - Jx \frac{x^2 + y^2 - 4z^2}{r^7} + \varepsilon \frac{\partial U}{\partial x} + \eta f_x \\ \ddot{y} &= -\mu \frac{y}{r^3} - Jy \frac{x^2 + y^2 - 4z^2}{r^7} + \varepsilon \frac{\partial U}{\partial y} + \eta f_y \\ \ddot{z} &= -\mu \frac{z}{r^3} - Jz \frac{3x^2 + 3y^2 - 2z^2}{r^7} + \varepsilon \frac{\partial U}{\partial z} + \eta f_z\end{aligned}$$

где $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$, μ – гравитационная постоянная Марса, $J = \frac{3}{2}\mu R^2 J_2$, $\varepsilon \nabla U$ – остальная часть гравитационного поля (без учета J_2), ε – глобальный коэффициент масштабирования [3], ηf – сумма всех сил (атмосферное сопротивление (в основном для низко полярных орбит), приливное ускорение Солнца, солнечное давление, релятивистские поправки и т.д.). Величина $\varepsilon \nabla U$ в данном случае отражает силы с маленькой амплитудой по отношению к центру и J_2 . Аналогичным образом обозначили величину ηf .

Теперь рассмотрим зонд, вращающийся вокруг планеты на большой высоте ($\varepsilon \approx 0$) около экваториальной орбиты ($z \approx 0$) без сопротивления атмосферы ($\eta \approx 0$). Уравнение примет вид:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -\mu \frac{x}{d^3} - J \frac{x}{d^5} \\ \ddot{y} &= -\mu \frac{y}{d^3} - J \frac{y}{d^5} \\ \ddot{z} &= -\mu \frac{z}{d^3} - 3J \frac{z}{d^5}\end{aligned} \quad (1)$$

где $d = (x^2 + y^2)^{1/2}$, $z \ll d$.

Ясно, что третье уравнение отлично от первых двух. Решению третьего соответствуют изменения относительно плоскости орбиты, которая не интересна нам в дальнейшем исследовании.

Если рассмотреть в цилиндрической системе координат (d, φ, z) , где $x = d \cos \varphi, y = d \sin \varphi$, то получим:

$$\ddot{d} = d\dot{\varphi}^2 - \frac{\mu}{d^2} - \frac{J}{d^4} \quad (1')$$

$$\frac{d}{dt}(d^2\dot{\varphi}) = 0 \Leftrightarrow d^2\dot{\varphi} = h_0$$

Величина h_0 выражает угловой момент.

Жезевски [4], [5] показал, что если $\Delta = 0$, то есть если $J = J^0 = \frac{3}{2}\mu R^2 J_2^0$, тогда решением уравнения (1') в эллиптической форме таким

$$u(\varphi) = c + (b - c) \operatorname{sn}^2\left(\frac{\varphi - \varphi_c}{\gamma g}\right)$$

$$t(\varphi) = t_c + \int_{\theta=\varphi_c}^{\varphi} \frac{d\theta}{u^2(\theta)}$$

где $u = \frac{1}{d}$, $\operatorname{sn}(x)$ - эллиптическая функция Якоби. Постоянные b и c задаются начальными условиями и обратно пропорциональна перицентру ($b = \frac{1}{a_p}$) и апоцентру $c = \frac{1}{r_a}$ орбиты. Остальные две постоянные задаются φ_c и t_c . Можно сказать, что $a = \frac{1}{(b+c)}\left(\frac{3\mu}{J^0} - bc\right)$, где $a > b > c$. Постоянная $k = \left(\frac{b-c}{a-c}\right)^{1/2}$ является модулем эллиптической функции Якоби, и $\gamma = h_0 \sqrt{\frac{3}{2J^0}}, g = \frac{2}{\sqrt{a-c}}$. Функции u и φ выражаются через периодическую функцию t с разными периодами, и определяют «эллипсис» с линией аписды, медленно вращающейся в экваториальной плоскости с периодом $F\left(\frac{\pi}{2}; k\right)$ (полный эллиптический интеграл первого рода). Приблизительное значение угловой скорости вращения линии аписды для не экваториального наклона орбиты i и большой полуоси a можно будет вывести из уравнения Лапласа путем сложения векового смещения J_2^0 , линии узлов $\dot{\Omega}$ и линии аписды $\dot{\omega}$:

$$\dot{\Omega} = -\frac{3}{2}n \frac{J_2^0 R^2 \cos i}{(1-e^2)^2 a^2}, \quad \dot{\omega} = -\frac{3}{4}n \frac{J_2^0 R^2 (1-5\cos^2 i)}{(1-e^2)^2 a^2}, \quad \Omega + \omega \text{ являющейся непрерывной случайной величиной,}$$

где $i \rightarrow 0$, ограничивающейся $\dot{\Omega} + \dot{\omega} = \frac{3}{2}n \frac{J_2^0 R^2}{(1-e^2)^2 a^2}$

Функцию Гамильтона для невозмущенного движения можно записать:

$$H_e = \frac{1}{2}\dot{d}^2 + \frac{1}{2}d^2\dot{\varphi}^2 - \frac{\mu}{d} - \frac{J_0}{3d^3} \quad (2)$$

Если $\Delta \neq 0$, то по теореме Пуанкаре [6] уравнение движения $J = J_0 + \Delta\phi$, можно записать следующим образом:

$$d = d_0 + \Delta d_1 + \Delta^2 d_2 + \dots$$

$$\varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi_1 + \Delta^2\varphi_2 + \dots \quad (3)$$

$$z = z_0 + \Delta z_1 + \Delta^2 z_2 + \dots$$

где $d_1, \varphi_1, z_1, d_2, \varphi_2, z_2 \dots$ - дифференциальные уравнения(ДУ) с нулевыми начальными условиями. Вставив уравнения(3) в уравнения(1'), и приравняв Δ , мы получаем эти ДУ.

В результате получим систему ДУ:

$$\ddot{d}_1 = \alpha d_1 + \beta \dot{\varphi}_1 + \gamma \phi$$

$$\ddot{\varphi}_1 = \delta d_1 + \tau \dot{d}_1 + \lambda \dot{\varphi}_1 \quad (4)$$

$$\alpha = \dot{\varphi}_0^2 + 2\frac{\mu}{d_0^3} + 4\frac{J_0}{d_0^5}, \quad \beta = 2d_0\dot{\varphi}_0, \quad \gamma = -\frac{1}{d_0^4}$$

$$\delta = 2\frac{\dot{d}_0\dot{\varphi}_0}{d_0^2}, \quad \tau = -2\frac{\dot{\varphi}_0}{d_0}, \quad \lambda = -2\frac{\dot{d}_0}{d_0}$$

Эту систему можно представить в виде системы ДУ первого порядка, заменив $p = \dot{u}, q = \dot{v}$. Мы получим

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{p} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ M & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ p \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ W \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\Leftrightarrow \dot{s} = Ns + w, \quad c \quad s(t_0) = 0$$

Аналогичные уравнения можно получить из формулировок Хилла или Лагранжа. Приведенный здесь подход является самым простым. Рассмотрение экваториальной орбиты, позволяет получить очень простое аналитическое решение задачи.

1.3. Теория Флоке

Система уравнений (5) является аналогом теории Флоке [7], то есть коэффициент матрицы N периодичен с периодом половины орбиты. Точнее система уравнения (5) является обобщением уравнения Матье [8].

Решением системы уравнения, при $s(t_0) = 0$, является

$$s(t) = \int_{t_0}^t \Pi(t, \xi) w(\xi) d\xi \quad (6)$$

где Π – решение системы однородной матрицы.

$$\dot{\Pi}(t, t_0) = N\Pi(t, t_0) \quad (7)$$

с $\Pi(t, t_0) = I$ являющейся единичной матрицей. Из за единственности решения мы получаем $\Pi(t_2, t_1)\Pi(t_1, t_0) = \Pi(t_2, t_0)$, $\Pi(t, t_0)^{-1} = \Pi(t_0, t)$. Так как матрица N периодична с периодом T , то есть $N(t + kT) = N(t)$, теореме Флоке утверждает, что решение $\Pi(t, t_0)$ является псевдопериодичной, и можно записать уравнение в виде $\Pi(t, t_0) = P(t, t_0)\exp((t - t_0)Q(t_0))$, где $P(t + T, t_0) = P(t, t_0)$ периодична с $P(t_0, t_0) = I$. $Q(t_0)$ – характеристика константы системы, которой соответствует равенство $Q(t_0 + T) = Q(t_0)$. Ограничения в решении системы (5) и (7) определяются константой матрицы

$C = \Pi(t_0 + T, t_0) = \exp(TQ(t_0))$, точнее спектральным радиусом ρ (наибольшее собственное значение [9]). Следовательно, если $\rho > 1$, однородная система (7) имеет неограниченное множество решений, так же как и неоднородная система, только если заданы специальные (нефизические) начальные условия [10].

1.4. Длительные изменения орбиты

Если $w(\xi)$ периодична с несколькими периодами T , мы имеем ряд изменений геометрических параметров [11].

$$s(t + kT) = s(t) + \Pi(t, t_0)U^{(k)}s(t_0 + T) \quad (8)$$

где $t_0 \leq t < t_0 + T, k \geq 0, U^{(k)} = I + C + \dots + C^{(k-1)} = I + CU^{(k-1)}, C = \Pi(t_0 + T, t_0)$ и $U^{(0)} = 0, U^{(1)} = I$.

Это соотношение показывает, что величина $U^{(k)}$ взаимосвязано с изменениями в этой системе за «длительный» период, как $\Pi(t, t_0)$ ограничивает $t_0 \leq t < t_0 + T$. Совершенно очевидно, что если $U^{(k)}$ отклоняется при $\rho > 1$, тогда $s(t + kT)$ отклоняется тоже, за исключением $s(t_0 + T) = 0$ (и тогда $s(t)$ будет периодичностью периода T). Это не значит, что возмущенное движение является безграничным, однако действие расширения Пуанкаре(3) будет прерван на каком-то периоде. Для того, чтобы получить общий период для N и w , мы просто должны немного изменить высоту космического аппарата для того, чтобы получить целое число орбитальных периодов в течение марсианского года, который затем станет общим периодом T .

2. Заключение

2.1. Численные результаты и выводы

Давайте рассмотрим решение для планеты Марса и его экваториальной орбиты. Период T экваториальной орбиты радиуса d получена из уравнения(1') $\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{\mu}{d^3} + \frac{3\mu}{2d^5}R^2J_2^0$

Мы возьмем числовые значения из [15] [16].

$$\mu = 42828.376383 \frac{km^3}{s^2}, J_2^0 = 1.95869919367 \times 10^{-5}$$

$$\frac{C_0}{MR^2} = 0.3662, R = 3394.2 km, \Omega_0 = 7.088218111 \times 10^{-5} \frac{rad}{s},$$

$$\omega = 1.05857641382 \times 10^{-7} \frac{rad}{s}, R\sigma = 7.85 m$$

Также рассчитаем $\Delta = -1.8971 \times 10^{-9}$, или $\times 10^{-6}$ относительно к J_2^0 .

Рассмотрим теперь круговую орбиту за пределами атмосферы на высоте 1000.629961 км (большая полуось равна 4394.829961 км), чтобы в результате получить 6716 орбит/марсианский год равного периоду орбиты 147.266 мин.

Рассчитаем $\rho = 1.002627$ для спектрального радиуса ρ в течение марсианского года исходя из Жорданова формы матрицы S .

В течение первого года, проводим наблюдение за возмущениями на высоте до 172.58 м, со скоростью до 122,69 мм/с. Они измеримы современной технологией, с помощью лазера и эффекта Доплера [17], и постепенно увеличивается со временем (рис. 2 и рис. 3), так как спектральный радиус ρ больше чем в первом и $s(t_0 + T)$ не равно нулю (мы имеем $\delta r(t_0 + T) = 1.12$ см и $\delta v(t_0 + T) = 4.9 \times 10^{-3}$ мм/с). Для наблюдения за этим методом поместим подобный спутник LAGEOS с лазерным кубом [18], оснащенный «активным» лазерным приемником [19] вместо пассивных светоотражателей, в такую орбиту и понаблюдаем в течение длительного времени.

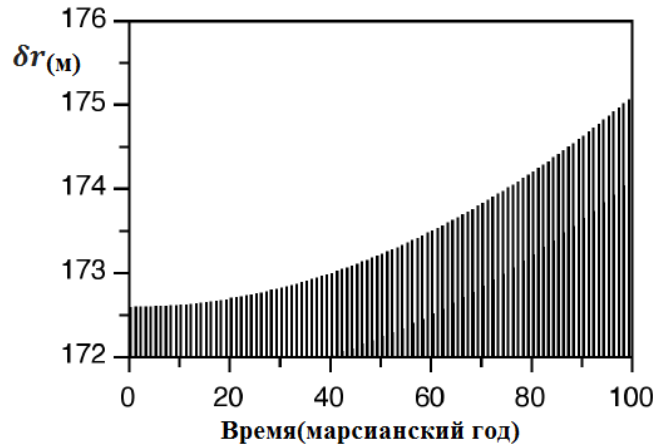


Рис. 2. График изменения возмущений на марсианский год

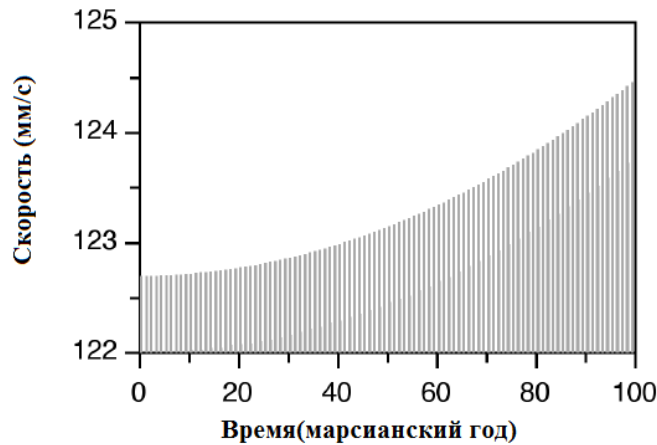


Рис. 3. График изменения скорости возмущений на марсианский год

Мы полагаем, что эта теория, описанная в этой статье, применима к любому типу орбиты, включая полярные орбиты. Результату исследований препятствует присутствие вековых возмущений.

Литература

1. Chao B. F. and Rubincam D. P. Variations of Mars Gravitational Field and Rotation Due to Seasonal CO2 Exchanges. Journal of Geophysical Research, 1990. P. 95. 14755-14760.
2. Karatekin O., Duron J., Rosenblatt P., Van Hoolst T., Dehant V. and Barriot J. P. Mar's Time-Variable Gravity and Its Determination: Simulated Geodesy Experiments. Journal of Geophysical Research—Planets, 2005. P. 110.
3. Mioc V. and Stavinschi M. (2004) Stability of Satellite Orbits around Nonspherical Planets. Artificial Satellites, 2004. P. 39, 129-133.
4. Jezewski D. J. A Noncanonical Analytic Solution to the J2 Perturbed Two-Body Problem. Celestial Mechanics, 1983. P. 30. 343-361.

5. *Jezewski D. J.* An Analytical Solution for the J2 Perturbed Equatorial Orbit. *Celestial Mechanics*, 1983. P. 30, 363-371 <http://dx.doi.org/10.1007/BF01375506>.
6. *Chazy J.* *Mécanique Céleste*. Presses Universitaires de France, Paris, 1953.
7. *Dieudonné J.* *Calcul Infinitésimal*. Hermann Ed. Paris, 1980.
8. *Angot A.* *Compléments de Mathématiques*. Masson et Cie Ed., Paris, 1972.
9. *Walter W.* *Ordinary Differential Equations*. Springer, New-York, 1998.
10. *Roseau M.* *Equations différentielles*. Masson. Paris, 1976.
11. *Vijayaraghavan A.* An Analytic Solution for the Orbital Perturbations of the Venus Radar Mapper Due to Gravitational Harmonics. AIAA/AAS Astrodynamics Conference, 1984. P. AIAA-84-1995.
12. *Mioc V. and Stavinschi M.* Stability of Satellite Motion in the Equatorial Plane of the Rotating Earth. Proceedings of the Journées des Systèmes de Référence Spatio-Temporels, N. Capitaine Ed., 1998. P. 257-261.
13. *Mioc V. and Stavinschi M.* Effects of Mars' Rotation on Orbiter Dynamics. Proceedings of the Journées des Systèmes de Référence Spatio-Temporels, N. Capitaine Ed, 2001. P. 120-125.