Regularization method two-dimensional integral equations Volterra-Fredholm first kind
Ryspaev A.
Метод регуляризации двумерных интегральных уравнений Вольтерра-Фредгольма первого рода
Рыспаев А. О.

Рыспаев Амантур Орозалиевич / Ryspaev Amantur - кандидат физико-математических наук, докторант, кафедра математического анализа, факультет математики, информатики и кибернетики, Кыргызский национальный университет им. Жусупа Баласагына, г. Бишкек, Кыргызская Республика

Аннотация: *в данной работе с учетом аналитико-регуляризационных методов исследованы двумерные интегральные уравнения Вольтерра-Фредгольма первого рода. Устанавливаются необходимые и достаточные условия разрешимости и их регуляризация в пространствах с равномерной метрикой.*

Abstract: *in this work with on analytic-regularizations method investigated a two-dimensional integral equation Volterra-Fredholm of the first kind. Installed necessary and sufficient conditions for the solvability and regularizability in the spaces with the uniform metric.*

Ключевые слова: *регуляризация, уравнение Вольтерра-Фредгольма, обратная задача, метод регуляризации.*

Keywords: *regularization, Volterra-Fredholm equation, inverse problem, method of regularization.*

Введение

В работе рассматриваются двумерные интегральные уравнения Вольтерра-Фредгольма первого рода [1]. Такие классы интегральных уравнений встречаются во многих обратных задачах математической физики [3, 5].

Рассмотрим

$$G_0 z \equiv \int_0^t K(x,t,s)z(x,s)d\tau ds + \lambda \int_0^T \int_0^{N_0(x)} H\left(x,t,s,\tau,\int_0^s z(\tau,s')ds'\right)d\tau ds = F(x,t), \qquad (1)$$

где $K, H, F - n$-мерные векторные функции с гладкостями требуемого порядка $0<\lambda-$ параметр (не является характеристическим значением уравнения), $z(x,t)-$ искомая n-мерная векторная функция.

Исходные предположения:

a₁) $0 \le N_0(x) \le x \le X,\ N_0(x) \in C^1[0,X];$

a₂) $K(x,t,s) \in C_n^{0,0,1}(D_0),\ D_0 = \{(x,t,s): x \in [0,X], t \in [0,T], 0 \le s \le t \le T\},$

$K_0(x,t) \equiv K_s(x,t,s),\ K_0(x,t) -$ имеет собственное действительное значение

$\lambda_i(t) \ge \alpha > 0, (i = \overline{1,n}), K(x,t,s)\big|_{s=t} \equiv 0;$

a₃) $F(x,t) \in C_n^{0,1}(D), D = [0,X]\times[0,T];$

a₄)

$$H(x,t,s,\tau,l) \in C_n^1(D_1),\ D_1 = \{(x,t,s,\tau,l): (x,t,s) \in D_0, 0 \le \tau \le N_0 \le x \le X,\ 0 \le l \le N_0(x)\};$$

a₅) $z(x,0) = q = const, G_0 -$ оператор типа Вольтерра-Фредгольма.

При вышеуказанных условиях уравнение (1) приводится к виду:

$$\int_0^t K_s(x,t,s)\int_0^s z(x,s')ds'ds - \lambda \int_0^T \int_0^{N_0(s)} \left(H(x,t,s,\tau,\int_0^s z(s')ds'\right)d\tau ds = F(x,t), \qquad (2)$$

(2) получается из системы (1) с учетом метода интегрирования по частям.

Введя подстановку вида

$$\int_0^t z(x,s)ds = \theta(x,t), \quad \theta(x,0) = 0, \qquad (3)$$

где $z(x,t) = \theta_t(x,t), \quad \forall (x,t) \in D,$ из (2), получим

$$(G_0\theta)(x,t)\equiv\int_0^t K_1(x,t,s)\theta(x,s)ds-\lambda\int_0^T\int_0^{N_0(x)}H_t(x,t,s,\tau,\theta(\tau,s))d\tau ds=-F_t'(x,t), \qquad (4)$$

где $K_0(x,t)\equiv K_{ts}(x,t,t):\lambda_i(t)\ge a>0,\ (i=\overline{1,n}),\quad K_1(x,t,s)\equiv K_{ts}(x,t,s).$

Докажем регуляризируемость систем (3), (4).

Для этого введем систему вида

$$\begin{cases}\varepsilon\theta_\varepsilon(x,t)+(G\theta_\varepsilon)(x,t)=-F_t'(x,t),\ \theta_\varepsilon(x,0)=0,\\ \delta z_\delta(x,t)+\int_0^t z_\delta(x,s)ds=\theta_\varepsilon(x,t)+\delta z(x,0),\end{cases} \qquad (5)$$

где ε,δ - малые параметры.

Если $W(x,t,0,\varepsilon)$ - матричная функция Коши системы [2,6]:

$$\theta_{\varepsilon t}+\frac{1}{\varepsilon}K_0\theta_\varepsilon=F_0(x,t),\ \theta_\varepsilon(x,0)=0,$$

$$W\equiv e^{-\int_s^t\frac{K_0(\tau)d\tau}{\varepsilon}},\quad (s\le t), \qquad (6)$$

и на основе неравенства Важевского[4]:

$$\|W(x,t,s,\varepsilon)\|\le\sqrt{n}e^{-\int_s^t\frac{ad\tau}{\varepsilon}},\quad (s\le t). \qquad (7)$$

Следовательно, на основе (6) из (7) относительно $\theta_\varepsilon(x,t),$ получим:

$$\theta_\varepsilon(x,t)=-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t W(x,t,s,\varepsilon)K_0(x,s)\cdot\Bigg\{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s\left[K_1(x,s,s')-K_1(x,s',s')\right]\theta_\varepsilon(x,s')ds'+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\left[K_1(x,t,s')-K_1(x,s',s')\right]\theta_\varepsilon(x,s')ds'-\frac{1}{\varepsilon}\lambda\int_0^T\int_0^{N_0(x)}[H_t(x,t,s',\tau,\theta_\varepsilon(\tau,s'))-$$

$$-H(x,s,s',\tau,\theta_\varepsilon(\tau,s'))]d\tau ds'-\frac{1}{\varepsilon}(F(x,s)-F(x,t))\Bigg\}ds-\frac{1}{\varepsilon}W(x,t,0,\varepsilon)\times$$

$$\times\left\{\int_0^t\left[K_1(x,t,s')-K_1(x,s',s')\right]\theta_\varepsilon(x,s')ds'-\lambda\int_0^T\int_0^{N_0(x)}H_t(x,t,s',\tau,\theta_\varepsilon(\tau,s'))d\tau ds'+F(x,t)\right\}\equiv(\aleph_0\theta_\varepsilon)(x,t,\varepsilon).$$

(8)

Аналогично получим

$$z_\delta(x,t)=-\frac{1}{\delta^2}\int_0^t W_0(x,t,s,\delta)(\theta_\varepsilon(x,s)-\theta_\varepsilon(x,t))ds+\frac{1}{\delta}W_0(x,t,0,\delta)\theta_\varepsilon(x,t)+$$

$$+W_0(x,t,0,\delta)z(x,0),\ \|W_0(x,t,0,\delta)\|\le\sqrt{n}e^{-\frac{1}{\delta}t}. \qquad (9)$$

где $W_0(x,t,s,\delta)=e^{-\frac{1}{\delta}(t-s)},(s\le t),\ \|W_0(x,t,0,\delta)\|\le\sqrt{n}e^{-\frac{1}{\delta}t}.$

Оценивая (8) получим

$$\|\theta_\varepsilon\|\le(2\sqrt{n}L_{K_1}\frac{1}{\alpha^2}C_0T_0+\sqrt{n}L_{K_1}e^{-1}\frac{1}{\alpha})\cdot T+\left[2L_H\sqrt{n}\frac{1}{\alpha^2}C_0T_0\lambda+L_H\sqrt{n}\frac{1}{\alpha}e^{-1}\lambda\right]\times$$

$$\times T\|\theta_\varepsilon\|_{C_n}+(L_F\frac{1}{\alpha^2}C_0\sqrt{n}+\lambda L_H\sqrt{n}\frac{1}{\alpha}e^{-1})\equiv m_0\|\theta_\varepsilon\|_{C_n}+M_1; \qquad (10)$$

$$m_0|\lambda| = \{(2\sqrt{n}L_{K_1}\frac{1}{\alpha^2}C_0T_0 + \sqrt{n}L_{K_1}e^{-1}\frac{1}{\alpha})\cdot T + \left[2L_H\sqrt{n}\frac{1}{\alpha^2}C_0T_0|\lambda| + L_H\sqrt{n}\frac{1}{\alpha}e^{-1}|\lambda|\right]\times X\},$$

$$T_0 = \sup\|K_0(x,t)\|,\ C_0 = \int_0^\infty e^{-z}zdz = 1,$$

$$M = (2\sqrt{n}L_{K_1}\frac{1}{\alpha^2}C_0T_0 + \sqrt{n}L_{K_1}e^{-1}\frac{1}{\alpha})\cdot T + (L_F\frac{1}{\alpha^2}C_0\sqrt{n} + |\lambda|L_H\sqrt{n}\frac{1}{\alpha}e^{-1}).$$

Если

$$m_0(\lambda) < 1, \qquad (11)$$

то из (10) получим

$$\|\theta_\varepsilon\|_{C_n} \le (1-m_0)^{-1}M. \qquad (12)$$

Поэтому учитывая $\theta_\varepsilon = \theta + \Im_\varepsilon$, имеем:

$$\begin{aligned}
\Im_\varepsilon(x,t) = &-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t W(x,t,s,\varepsilon)K_0(x,s)\Big\{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s[K_1(x,s,s') - K_1(x,s',s')]\Im_\varepsilon(x,s')ds + \\
&+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t[K_1(x,t,s') - K_1(x,s',s')]\Im_\varepsilon(x,s')ds' + \frac{1}{\varepsilon}\lambda\int_0^T\int_0^{N_0(x)}[H_t(x,s,s',\tau,\theta(\tau,s')) + \\
&+\Im_\varepsilon(\tau,s') - H(x,s,s',\tau,\theta(\tau,s'))]d\tau ds' - \frac{1}{\varepsilon}\lambda\int_0^T\int_0^{N_0(x)}[H(x,t,s',\tau,\theta(\tau,s')) + \Im_\varepsilon(\tau,s') - \\
&-H(x,t,s',\tau,\theta(\tau,s'))]d\tau ds'\Big\}ds - \frac{1}{\varepsilon}W(x,t,0,\varepsilon)\cdot\Big\{\int_0^t[K_1(x,t,s') - K_1(x,s',s')]\Im_\varepsilon(x,s')ds' - \\
&-\frac{1}{\varepsilon}\lambda\int_0^T\int_0^{N_0(x)}[H(x,t,s',\tau,\theta(\tau,s')) + \Im_\varepsilon(\tau,s') - H_t(x,t,s',\tau,\theta(\tau,s'))]d\tau ds'\Big\}ds + \qquad (13)\\
&+\Delta(x,t,\varepsilon,0) \equiv (D\cdot\Im_\varepsilon)(x,t,\varepsilon),
\end{aligned}$$

$$\Delta(x,t,\varepsilon,0) \equiv -\frac{1}{\varepsilon}\int_0^T W(x,t,s,\varepsilon)K_0(x,s)(\theta(x,t) - \theta(x,s))ds - W_0(x,t,0,\varepsilon)\theta(x,t), \qquad (14)$$

$$\|\Delta\|_{C_n} \le (L_0T_0\sqrt{n}\frac{1}{\alpha^2} + L_0\sqrt{n}\frac{1}{\alpha}e^{-1})\varepsilon \equiv Q_1\varepsilon. \qquad (15)$$

Следовательно, на основе (13)-(15), получим оценку:

$$\|\Im_\varepsilon\|_{C_n} \le (1-m_0)^{-1}Q_1\varepsilon = M_2(\varepsilon), \qquad (16)$$

Значит $\Im_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0, \quad \forall(x,t)\in D$

Далее, с учетом $z_\delta = z + \xi_\delta$, получим

$$\begin{aligned}
\xi_\delta(x,t) = &-\frac{1}{\delta^2}\int_0^T W_0(x,t,s,\delta)(\theta_\varepsilon(x,s) - \theta(x,s))ds + \frac{1}{\delta}(\theta_\varepsilon(x,t) - \theta(x,t)) - W_0(x,t,0,\delta)\times \\
&\times[z(x,t) - z(x,0)] - \frac{1}{\delta}\int_0^t W_0(x,t,s,\delta)(z(x,t) - z(x,s))ds. \qquad (17)
\end{aligned}$$

Тогда оценивая (17), имеем:

$$\|\xi_\delta\|_{C_n} \le \frac{2\sqrt{n}M_2(\varepsilon)}{\delta} + 2L_z\sqrt{n}\delta = Q_0(\varepsilon,\delta). \qquad (18)$$

где $0 < L_2 -$ коэффициент Липшица z по t.

Так как $\Delta_0(\delta,z) \equiv -W_0(x,t,0,\delta)[z(x,t)-z(x,0)] - \frac{1}{\delta}\int_0^t W_0(x,t,s,\delta)(z(x,t)-z(x,s))ds,$

то оценивая, имеем

$$\|\Delta_0\| \le \sqrt{n}e^{-\frac{1}{\delta}t}\|z(x,t)-z(x,0)\| + \frac{\sqrt{n}}{\delta}\int_0^t e^{-\frac{1}{\delta}(t-s)}\|z(x,t)-z(x,s)\|ds \le \sqrt{n}e^{-\frac{1}{\delta}t}L_2\cdot t +$$

$$\frac{\sqrt{n}}{\delta}\int_0^t e^{-\frac{1}{\delta}(t-s)}L_2(t-s)ds = L_2(\sqrt{n}e^{-\frac{1}{\delta}t}t - \sqrt{n}e^{-\frac{1}{\delta}t} - \sqrt{n}\int_0^t e^{-\frac{1}{\delta}(t-s)}ds) = \qquad (19)$$

$$L_2\sqrt{n}\delta(1-e^{-\frac{1}{\delta}t}) \le L_2\sqrt{n}\delta.$$

Поэтому учитывая (16), (19) и оценивая (17), получим (18), что требовалось доказать.
Если предположим, что[8]:

$$\frac{M_1(\varepsilon)}{\delta} \xrightarrow[\delta\to 0,(\varepsilon\to 0)]{} 0, \qquad (21)$$

то следует

$$\xi_\delta \xrightarrow[\delta\to 0,\varepsilon\to 0]{} 0,\ z_\delta(x,t) \xrightarrow[\delta\to 0]{} z(x,t),\ \forall(x,t)\in D. \qquad (22)$$

Отсюда видно, что $(\theta_\varepsilon, z_\delta) \xrightarrow[\varepsilon\to 0(\delta\to 0)]{} (\theta; z),\ \forall(x,t)\in D.$

Теорема 1. При условиях (a_1- a_5), (11) то существует единственная функция $z(x,t)\in C_n(D),$ причем регуляризируется в этом пространстве.

В результате исследований системным методом регуляризации получены достаточные условия разрешимости интегральных уравнений Вольтерра-Фредгольма первого рода в пространствах с равномерной метрикой. Метод данной работы может применяться к обратным задачам более сложной структуры, сводящихся к интегральным уравнениям Вольтерра-Фредгольма первого рода.

Литература

1. *Белоцерковский С. М., Лифанов И. К.* Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. М.: Наука, 1985. С. 179.
2. *Булатов М. В.* Регуляризация вырожденных систем интегральных уравнений Вольтерра. ЖВМ и МФ, 2002. Т. 42 № 3 С. 330-335.
3. *Бухгейм А. Л.* Уравнения Вольтерра и обратные задачи. Новосибирск: Наука, 1983. 207 с.
4. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
5. *Омуров Т. Д.* Методы регуляризации интегральных уравнений Вольтерра первого и третьего рода. Бишкек: Илим, 2003. 162 с.
6. *Омуров Т. Д., Каракеев Т. Т.* Регуляризация и численные методы решения обратных и нелокальных краевых задач. Бишкек: Илим, 2006. 164 с.
6. *Омуров Т. Д., Рыспаев А. О.* Обратные задачи типа Бона-Махони в неограниченной области. // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. Бишкек: Илим, 2009. С. 111-115.
7. *Омуров Т. Д., Рыспаев А. О.* Многомерные обратные задачи в неограниченной области. // Вестник КНУ, 2010. (4). С. 28-36.