Regularization of a system of nonlinear Volterra integral equations of the first kind

Karakeev T.[1], Mustafaeva H.[2]

Регуляризация системы нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода

Каракеев Т. Т.[1], Мустафаева Н. Т.[2]

[1]Каракеев Таалайбек Тултемирович / Karakeev Taalaibek – доктор физико-математических наук, профессор;
[2]Мустафаева Нагима Таировна / Mustafaeva Nagima – аспирант,
кафедра информационных технологий и программирования,
Кыргызский национальный университет им. Ж. Баласагына, г. Бишкек, Кыргызская Республика

Аннотация: *в работе изучаются вопросы регуляризации системы нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода. Получен регуляризирующий оператор, доказана равномерная сходимость регуляризованного решения к точному решению рассматриваемой системы в шаре.*
Abstract: *in work questions of regularization of the system of nonlinear integrated equations of Voltaire of the first kind. The regularizing operator is received, uniform convergence of the regularized solution to the exact solution of the considered systems in a sphere is proved.*

Ключевые слова: *уравнение Вольтерра, малый параметр, равномерная сходимость.*
Keywords: *Volterra equations, small parameter, uniform convergence.*

Рассмотрим систему нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода

$$\int_0^x N\big(x,t,u(t)\big)\,dt = g(x), \qquad (1)$$

где $N\big(x,t,u(t)\big) = K(x,t) + N_0\big(x,t,u(t)\big)$.

Пусть для известных функций $K(x,t)$, $N_0\big(x,t,u(t)\big)$, $g(x)$ выполняются условия:

а) $g(x) = colon\big(g_1(x),\dots,g_n(x)\big)$, $g_i(x) \in C[0,b]$, $g_i(0) = 0$, $i = \overline{1,n}$;

б) $K(x,t) -$ $n\times n -$ мерная матричная функция, $K_{i,j}(x,t) \in C(D)$,
$D = \{(x,t)/\ 0 \le t \le x \le b\}$, $K_{i,j}(x,x) \ge 0$, $i,j = \overline{1,n}$;

в) $G(x) -$ $n\times n$ – мерная матричная функция,

$$G_{ij}(x) = \begin{cases} K_{i,j}(x,x), & j \ne i, \\ K_{i,i}(x,x) + C_1 g_i(x), & i = j, \quad i,j = \overline{1,n}, \end{cases}$$

$\|G(x)\| \le C_2\lambda(x)$, $\|\cdot\|$ - норма матрицы, $\lambda(x) \ge d_1$, $0 < d_1, C_1, C_2 = const$,
$\lambda(x) = \min\limits_{1\le i\le n} \lambda_i(x)$, $\lambda_i(x)$ $(i = \overline{1,n})$ – собственные значения матрицы
$[G(x) + G^*(x)]/2$, $G^*(x)$ – сопряженная матрица к матрице $G(x)$;

г) $N_0\big(x,t,u(t)\big) - n\times n$ – мерная вектор - функция,
$N_0(x,t,u) \in C(D_1)$, $D_1 = D \times R^1$, $N_0(x,x,u) = 0$,
$|N_0(x,s,u) - N_0(x,s,\omega) - N_0(t,s,u) + N_0(t,s,\omega)| \le L_N(x-t)|u-\omega|$,
$0 < L_N = const$.

С помощью оператора $I + C_1T$, где I – единичный оператор, T – оператор Вольтерра вида

$$(Tu)(x) = \int_0^x v(t)u(t)dt,$$

и $v(x) = diag\big(u_1(x),\dots,u_n(x)\big)$, действуем на систему уравнений (1). Тогда получим систему уравнений [2]

$$\int_0^x G(t)u(t)dt = \int_0^x M\big(x,t,u(t)\big)dt +$$

$$+C_1\int_0^x\int_t^x (B_0u)(s)N\big(s,t,u(t)\big)\,dsdt + g(x), \qquad (2)$$

где $M\big(x,t,u(t)\big) = K(t,t) - K(x,t) - N_0\big(x,t,u(t)\big)$,
$(B_0u)(s) = diag\big(u_1(x),\dots,u_n(x)\big)$.

Рассмотрим систему уравнений

$$\varepsilon u_\varepsilon(x) + \int_0^x G(t)\,u_\varepsilon(t)dt = \int_0^x M\big(x,t,u_\varepsilon(t)\big)dt +$$

$$+C_1\int_0^x\int_t^x (B_0u_\varepsilon)(s)N\big(s,t,u_\varepsilon(t)\big)\,dsdt+\varepsilon u(0)+g(x), \qquad (3)$$

где ε - малый параметр из интервала (0,1).

С помощью резольвенты ядра $(-G(s)/\varepsilon)$ систему уравнений (3) преобразуем к виду

$$u_\varepsilon(x)=-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^x exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^x G(s)\,ds\right)G(t)\left\{\int_0^t M\big(t,s,u_\varepsilon(s)\big)ds-\right.$$

$$-\int_0^x M\big(x,s,u_\varepsilon(s)\big)ds+C_1\int_0^t\int_s^t (B_0u_\varepsilon)(\nu)\,N\big(\nu,s,u_\varepsilon(s)\big)d\nu ds-$$

$$\left.-C_1\int_0^x\int_s^x (B_0u_\varepsilon)(\nu)N\big(\nu,s,u_\varepsilon(s)\big)\,d\nu ds+g(t)-g(x)\right\}dt+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x G(s)\,ds\right)\left\{\int_0^x M\big(x,t,u_\varepsilon(t)\big)\,dt+\right.$$

$$\left.+C_1\int_0^x\int_t^x (B_0u_\varepsilon)(s)N\big(s,t,u_\varepsilon(t)\big)\,dsdt+\varepsilon u(0)+g(x)\right\}\equiv(Au_\varepsilon)(x). \qquad (4)$$

Допустим, что $\bar{u}_\varepsilon(x),\ \tilde{u}_\varepsilon(x)\in\Omega_n[0,b]=\{\,u(x)\in C_n[0,b]\colon \|u(x)-u_0\|\le r_0,\ 0<u_0,\ r_0=const\}$. Оценим разность операторов $(A\bar{u}_\varepsilon)(x)-(A\tilde{u}_\varepsilon)(x)$. Учитывается, что матричная функция

$$exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^x G(s)\,ds\right)$$

удовлетворяет неравенству Важевского [4, стр. 149]

$$\left\|exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^x G(s)ds\right)\right\|\le\sqrt{n}\,exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^x \lambda(s)ds\right),$$

получим следующие оценки

$$\left\|\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^x exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^x G(s)\,ds\right)G(t)\left\{\int_0^t\big[N_0\big(x,s,\bar{u}_\varepsilon(s)\big)-N_0\big(x,s,\tilde{u}_\varepsilon(s)\big)\big]ds\,dt-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\int_0^t\big[N_0\big(t,s,\bar{u}_\varepsilon(s)\big)+N_0\big(t,s,\tilde{u}_\varepsilon(s)\big)\big]ds\,dt\right\}\right\|\le\frac{C_2}{\varepsilon^2}\int_0^x exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^x \lambda(s)\,ds\right)\times$$

$$\times L_N\sqrt{n}\lambda(t)(x-t)\int_t^x\|\bar{u}_\varepsilon(s)-\tilde{u}_\varepsilon(s)\|\,dsdt\le\frac{C_2L_N\sqrt{n}}{d_1}\int_0^x\|\bar{u}_\varepsilon(t)-\tilde{u}_\varepsilon(t)\|\,dt;$$

$$\left\|\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^x exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^x G(s)\,ds\right)G(t)\int_t^x\big[N_0\big(x,s,\bar{u}_\varepsilon(s)\big)-N_0\big(x,s,\tilde{u}_\varepsilon(s)\big)\big]\,ds\,dt\right\|\le$$

$$\le\frac{C_2L_N}{\varepsilon^2}\sqrt{n}\int_0^x exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^x \lambda(s)\,ds\right)\lambda(t)\int_t^x(x-s)\|\bar{u}_\varepsilon(s)-\tilde{u}_\varepsilon(s)\|\,dsdt\le$$

$$\le C_2L_N\,d_1^{-1}\sqrt{n}\int_0^x\|\bar{u}_\varepsilon(t)-\tilde{u}_\varepsilon(t)\|\,dt;$$

$$\left\|\frac{C_1}{\varepsilon^2}\int_0^x exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^x G(s)\,ds\right)G(t)\times\right.$$

$$\left.\times\int_0^t\int_t^x[(B_0\bar{u}_\varepsilon)(\nu)-(B_0\tilde{u}_\varepsilon)(\nu)]N_0\big(\nu,s,\bar{u}_\varepsilon(s)\big)\,d\nu dsdt\right\|\le\frac{C_1C_2M_Nb}{\varepsilon^2}\sqrt{n}\times$$

$$\times\int_0^x exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^x \lambda(s)ds\right)\lambda(t)\int_t^x\|\bar{u}_\varepsilon(\nu)-\tilde{u}_\varepsilon(\nu)\|d\nu\,dt\le$$

$$\le C_1C_2M_Nbd_1^{-1}\sqrt{n}\|\bar{u}_\varepsilon(x)-\tilde{u}_\varepsilon(x)\|_{C_n[0,b]},\quad M_N=\max_{D_1}\big\|N_0\big(x,t,u_\varepsilon(t)\big)\big\|;$$

$$\left\|\frac{C_1}{\varepsilon^2}\int_0^x exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^x G(s)\,ds\right)G(t)\times\right.$$
$$\left.\times\int_t^x\int_s^x[(B_0\bar{u}_\varepsilon)(\nu)-(B_0\tilde{u}_\varepsilon)(\nu)]N_0\big(\nu,s,\bar{u}_\varepsilon(s)\big)\,d\nu ds\,dt\right\|\le\frac{C_1C_2M_N\sqrt{n}}{\varepsilon^2}\times$$
$$\times\int_0^x exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^x\lambda(s)\,ds\right)\lambda(t)(x-t)\int_s^x\|\bar{u}_\varepsilon(\nu)-\tilde{u}_\varepsilon(\nu)\|d\nu\,dt\le$$
$$\le C_1C_2M_Nd_1^{-1}\sqrt{n}\int_0^x\|\bar{u}_\varepsilon(t)-\tilde{u}_\varepsilon(t)\|\,dt;$$
$$\left\|\frac{C_1}{\varepsilon^2}\int_0^x exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^x G(s)\,ds\right)G(t)\times\right.$$
$$\times\left\{\int_0^t\int_t^x(B_0\tilde{u}_\varepsilon)(\nu)\big[N_0\big(\nu,s,\bar{u}_\varepsilon(s)\big)-N_0\big(\nu,s,\tilde{u}_\varepsilon(s)\big)\big]d\nu ds-\right.$$
$$\left.\left.-\int_t^x\int_s^x(B_0\tilde{u}_\varepsilon)\big[N_0\big(\nu,s,\bar{u}_\varepsilon(s)\big)-N_0\big(\nu,s,\tilde{u}_\varepsilon(s)\big)\big]d\nu ds\right\}dt\right\|\le$$
$$\le C_1C_2L_Nrd_1^{-1}\sqrt{n}\left(\int_0^x\|\bar{u}_\varepsilon(t)-\tilde{u}_\varepsilon(t)\|\,dt+\ b\|\bar{u}_\varepsilon(x)-\tilde{u}_\varepsilon(x)\|_{C_n[0,b]}\right);$$
$$\left\|\frac{1}{\varepsilon}exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x G(s)\,ds\right)\int_0^x[N_0(x,t,\bar{u}_\varepsilon(t))-N_0(x,t,\tilde{u}_\varepsilon(t))]dt\right\|\le$$
$$\le L_Nd_1^{-1}\sqrt{n}\int_0^x\|\bar{u}_\varepsilon(t)-\tilde{u}_\varepsilon(t)\|dt;$$
$$\left\|\frac{C_1}{\varepsilon}exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x G(s)\,ds\right)\left\{\int_0^x\int_t^x[(B_0\bar{u}_\varepsilon)(s)-(B_0\tilde{u}_\varepsilon)(s)]\,N_0\big(s,t,\bar{u}_\varepsilon(t)\big)dsdt+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\int_0^x\int_t^x(B_0\tilde{u}_\varepsilon)(s)\big[N_0\big(s,t,\bar{u}_\varepsilon(t)\big)-N_0\big(s,t,\tilde{u}_\varepsilon(t)\big)\big]dsdt\right\}\right\|\le$$
$$\le C_1b(M_N+L_Nr)d_1^{-1}\sqrt{n}\int_0^x\|\bar{u}_\varepsilon(t)-\tilde{u}_\varepsilon(t)\|dt.$$

Таким образом, получим следующее неравенство:

$$\|(A\bar{u}_\varepsilon)(x)-(A\tilde{u}_\varepsilon)(x)\|_{C_n[0,b]}\le$$
$$\le q_0\|\bar{u}_\varepsilon(x)-\tilde{u}_\varepsilon(x)\|_{C_n[0,b]}+(q_1+q_2)\int_0^x\|\bar{u}_\varepsilon(t)-\tilde{u}_\varepsilon(t)\|dt,\qquad(5)$$

где $q_0=C_1C_2M_Nbd_1^{-1}\sqrt{n}$;

$q_1=\Big((C_2L_k+L_k+2C_1Mr)d_1^{-1}+C_1C_2r(L_kbd_1{}^{-1}+1)\Big)\sqrt{n}$;

$q_2=(C_2L_N(2+C_1r)+C_1M_N(C_2+b)b+L_N(1+r)))d_1^{-1}\sqrt{n}$.

Переходя к норме в обеих частях неравенства (6) получим

$$\|(A\bar{u}_\varepsilon)(x)-(A\tilde{u}_\varepsilon)(x)\|_{C_n[0,b]}\le q\|\bar{u}_\varepsilon(x)-\tilde{u}_\varepsilon(x)\|_{C_n[0,b]},\qquad(6)$$

где $q=q_0+(q_1+q_2)b$. Если $q<1$, то существует[3] единственное решение системы (4) в шаре $\Omega_n[0,b]$.

Для заданного оператора $(H_\varepsilon u)(x)$

$$(H_\varepsilon u)(x)\equiv exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x G(s)\,ds\right)[u(x)-u(0)]+$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^x G(s)ds\right)G(t)\,[u(x)-u(t)]dt,$$

имеет место следующая лемма [1].

Лемма 1. При выполнении условий *а) - г)* и $u(x) \in C[0,b]$ имеет место оценка

$$\|(H_\varepsilon u)(x)\|_{C[0,b]} \le$$

$$\le (2C_2+1)exp\left(-\frac{1}{\varepsilon^{1-\beta}}\right)\sqrt{n}\|u(x)\|_{C[0,b]} + (C_2+1)\omega_u(\varepsilon^\beta)\sqrt{n}, \qquad (7)$$

где $\omega_u(\varepsilon^\beta) = \sup\limits_{|x-s|\le\varepsilon^\beta} |u(x)-u(s)|, \quad 0 \le \beta < 1.$

Теорема 1. Пусть выполняются условия *а*) - *г*), $q < 1$ и система уравнений (1) имеет решение $u(x) \in C_n[0,b]$. Тогда при $\varepsilon \to 0$ решение системы уравнений (3) равномерно сходится к решению системы уравнений (1), при этом справедлива оценка

$$\|u_\varepsilon(x) - u(x)\|_{C[0,b]} \le$$

$$\le \sqrt{n}\left((2C_2+1)exp\left(-\frac{1}{\varepsilon^{1-\beta}}\right)\|u(x)\|_{C[0,b]} + (C_2+1)\omega_u(\varepsilon^\beta)\right)/(1-q). \quad (8)$$

Доказательство. К обеим частям уравнения (2) прибавим величину $\varepsilon u(x)$, тогда имеем уравнение

$$\varepsilon u(x) + \int_0^x G(t)u(t)dt = \int_0^x M(x,t,u(t))dt +$$

$$+C_1\int_0^x\int_t^x (B_0u)(s)N(s,t,u(t))\,dsdt + \varepsilon u(x) + g(x), \qquad (9)$$

Введем подстановку $\eta_\varepsilon(x) = u_\varepsilon(x) - u(x)$. Из (3) отнимаем (9) и полученное уравнение приводим к виду

$$\eta_\varepsilon(x) = -\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^x exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^x G(s)\,ds\right)G(t)\left\{\int_0^t\left[M(t,s,u_\varepsilon(s)) -\right.\right.$$

$$-M(t,s,u(s)) - M(x,s,u_\varepsilon(s)) + M(x,s,u(s))]ds - \int_t^x [M(x,s,u_\varepsilon(s)) -$$

$$-M(x,s,u(s))]ds - C_1\int_0^t\int_t^x (B_0\eta_\varepsilon)(v)N(v,s,u(s))\,dvds - C_1\int_t^x\int_s^x (B_0\eta_\varepsilon)(v) \times$$

$$\times N(v,s,u(s))dvds - C_1\int_0^t\int_t^x (B_0u)(v)[N(v,s,u_\varepsilon(s)) - N(v,s,u(s))]\,dvds -$$

$$\left.-C_1\int_t^x\int_s^x (B_0u)(v)[N(v,s,u_\varepsilon(s)) - N(v,s,u(s))]\,dvds + \varepsilon[u(t)-u(x)]\right\}dt +$$

$$+\frac{C_1}{\varepsilon}exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x G(s)ds\right)\left\{\int_0^x [M(x,t,u_\varepsilon(t)) - M(x,t,u(t))]\,dt +\right.$$

$$+C_1\int_0^x\int_t^x (B_0u)(s)[N(s,t,u_\varepsilon(t)) - N(s,t,u(t))]dsdt +$$

$$\left.+C_1\int_0^x\int_t^x (B_0\eta_\varepsilon)(s)N(s,t,u(t))\,dsdt + \varepsilon[u(x)-u(0)]\right\}. \qquad (10)$$

На основе оценки (6) из (10), получим

$$\|\eta_\varepsilon(x)\|_{C_n[0,b]} \le q\|\eta_\varepsilon(x)\|_{C_n[0,b]} + \|(H_\varepsilon u)(x)\|_{C_n[0,b]}.$$

Отсюда, в силу (7) и условия $q < 1$, $\|\eta_\varepsilon(x)\|_{C_n[0,b]} \to 0, при\ \varepsilon \to 0$. Учитывая, что $\eta_\varepsilon(x) = u_\varepsilon(x) - u(x)$ получим (9). Теорема 1 доказана.

Следствие 1. При выполнении условий теоремы 1 решение системы уравнений (1) единственно в $\Omega_n[0,b]$.

Теорема 2. Пусть выполняются условия *а*) - *г*), $q < 1$ и система уравнений (1) имеет решение $u(x) \in C_n^\gamma[0,b]$, $0 < \gamma \le 1$. Тогда при $\varepsilon \to 0$ решение системы (3) равномерно сходится к решению системы (1), причем

$$\|u_\varepsilon(x) - u(x)\|_{C_n[0,b]} \le M_0C_3\varepsilon^\beta/(1-q).$$

Следствие 2. При выполнении условий теоремы 2 решение системы уравнений (1) единственно в $\Omega_n^\gamma[0,b] = \{\, u(x) \in \Omega_n[0,b]: \|u(x)-u(t)\| \le M_0|x-t|,\ 0 < M_0 = const\}$, $0 < \gamma \le 1$.

Доказательство теоремы 2 проводится аналогично доказательству теоремы 1, при этом необходимо используется оценка для оператора $(H_\varepsilon u)(x)$ вида [1]:

$\|(H_\varepsilon u)(x)\|_{C[0,b]} \le M_0C_3\varepsilon^\beta,\ 0 \le \beta < 1,$

где $C_3 = (|1 - C_2|C_0 + C_2C_4)\sqrt{n}$, $C_4 = \gamma \int\limits_0^\infty e^{-\tau}\tau^{\gamma-1}\, d\tau$, $C_0 = \sup\limits_{\tau\in[0,\infty)} \tau^\gamma e^{-\tau}$,

Литература

1. *Иманалиев М. И., Асанов А.* Регуляризация, единственность и существование решения для интегральных уравнений Вольтерра первого рода // Исслед. по интегро–дифференц. Уравнениям. Фрунзе: Илим, 1988. Вып. 21. С. 3–38.
2. *Каракеев Т. Т.,Мустафаева Н.* Регуляризация интегральных уравнений Вольтерра первого рода // Вестник КНУ им. Ж.Баласагына, 2014. Выпуск 5. С.19-22.
3. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. Москва: Наука, 1980. 496 с.
4. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. Москва: Наука, 1967. 472 с.