Repetition sections of mathematics in solving of problem
Maylybasheva Ch.[1], Koychumanova J.[2]

Повторение разделов математики при решении одной задачи
Майлыбашева Ч. С.[1], Койчуманова Ж. М.[2]

[1]Майлыбашева Чолпон Сатыбалдиевна / Maylybasheva Cholpon - кандидат педагогических наук, доцент,
кафедра алгебры, геометрии, топологии и преподавания высшей математики,
факультет математики, информатики и кибернетики,
Кыргызский национальный университет имени Ж. Баласагына;
[2]Койчуманова Жылдыз Мааметовна / Koychumanova Jyldyz - кандидат педагогических наук, доцент,
кафедра естественных и гуманитарных наук,
Кыргызский государственный технический университет имени И. Раззакова, г. Бишкек, Кыргызская Республика

Аннотация: *в статье показаны различные способы решения одной задачи. Можно повторить многие разделы математики.*
Abstract: *the article is show the different ways of solving of problem. You can repeat many branches of mathematics.*

Ключевые слова: *способы решения задач, методика повторения и закрепления.*
Keywords: *ways of solving of tasks, method of repetition and consolidation.*

УДК 3713:510

Студенты третьего курса на факультете математики, информатики и кибернетики изучают методику преподавания математики. На занятиях выясняем уровень знаний студентов школьной математики. Если не знаешь материал, как можно говорить о методике преподавания.

Ставим цель – при решении одной задачи повторить разные разделы школьной математики. У нас в руках книга В. И.Рыжика «Учим математике: теория и практика. 7-11 классы». На кафедре магистранты в своих магистерских диссертациях рассматривали уравнения, решали их 11 разными способами. Предлагали по 7 решений одной задачи по геометрии.

Подготовка выпускников к ОРТ в нашей республике, к ЕГЭ в России, проверка знаний студентов по школьной математике, экономия времени привели нас к вопросу «как?». Ответ на этот вопрос видим в разных способах решения одной задачи.

Задача.

Маша и Даша, работая совместно, могут прополоть грядку за 12 мин. Одна Маша смогла бы это сделать за 20 мин. За какое время смогла бы это сделать одна Даша?

Сейчас всё больше и больше школьников посещают курсы ментальной арифметики. Тогда предложенную задачу можно решать и без введения переменной.

Решение 1

Примем всю работу за 1. Так как всю грядку Маша пропалывает за 20 мин., то за 1 мин. Маша пропалывает $\frac{1}{20}$ грядки. Так как всю грядку Маша и Даша вместе пропалывают за 12 мин, то за 1 мин. они вместе пропалывают $\frac{1}{12}$ грядки. Поэтому Даша за 1 мин. пропалывает $\frac{1}{20}-\frac{1}{12}=\frac{1}{30}$ грядки.

Значит, всю грядку Даша прополет за 30 мин.

Решение 2

Так как всю грядку Маша пропалывает за 20 мин. то за 12 мин совместной работы она пропалывает $\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$ грядки. Оставшиеся $\frac{2}{5}$ грядки пропалывает Даша за 12 мин. Поэтому всю грядку Даша пропалывает за $12:\frac{2}{5}=30$ мин.

Решение 3

Поскольку скорость равномерного процесса можно находить за любой промежуток времени, будем определять ее за 1 ч.

Так как обе девочки пропалывают одну грядку за 12 мин, то за 1 ч обе девочки пропалывают пять таких же грядок. Так как Маша пропалывает одну грядку за 20 мин., то Маша за 1 ч. пропалывает три таких же грядки. Значит, Даша за 1 ч пропалывает две таких же грядки. Поэтому одну грядку Даша пропалывает за полчаса

Перейдем теперь к решениям с помощью уравнений.

Решение 4

Примем всю работу за 1. Пусть время работы Даши равно Т. Тогда скорость работы Даши равна $\frac{1}{T}$. Так как Маша пропалывает всю грядку за 20 мин., то скорость работы Маши - $\frac{1}{20}$. Так как Маша и Даша вместе пропалывает всю грядку за 12 мин., то скорость совместной прополки равна $\frac{1}{T}+\frac{1}{20}$. Значит, время, за которое пропалывается вся грядка при совместной работе, равно $\frac{1}{\frac{1}{T}+\frac{1}{20}}$. Согласно условию это время составляет 12 мин. Поэтому получаем такое уравнение: $\frac{1}{\frac{1}{T}+\frac{1}{20}}=12.$

Отсюда легко получить время, за которое Даша пропалывает грядку, - 30 мин.

Такой способ решения можно считать «классическим». Именно он приведен И. Ньютоном в его сочинении «Всеобщая арифметика». Именно с решения таких задач и начиналась алгебра. Способ этот состоит в том, что искомая величина обозначается какой-то буквой (обычно буквой x), после чего она выражается (чаше всего) двумя независимыми способами. Полученные выражения приравниваются, и получается уравнение с одной неизвестной. Оно затем и решается.

Решение 5

Однако необязательно обозначать как неизвестное именно искомую величину. Иногда это даже не самое удобное. Можно считать, например, неизвестной не время, а скорость работы Даши. Тогда получим очень похожее решение. Вот оно.

Примем всю работу за 1. Производительность труда каждой девочки и обеих вместе отождествим со скоростью их работы. Пусть скорость работы Даши равна v. Так как Маша пропалывает всю грядку за 20 мин, то скорость работы Маши – $\frac{1}{20}$. Так как Маша и Даша вместе пропалывают всю грядку за 12 мин., то скорость совместной прополки равна $v+\frac{1}{20}v$. Значит, время, за которое пропалывается вся грядка при совместной работе, равно $\frac{1}{v+\frac{1}{20}}$. Согласно условию это время составляет 12 мин. Поэтому получаем такое уравнение: $\frac{1}{v+\frac{1}{20}}=12.$

Отсюда $v=\frac{1}{30}$, и время, за которое Даша пропалывает грядку, равно $1:\frac{1}{30}=30$ мин.

В отличие от предыдущего решения пропала некая симметричность в левой части уравнения. Получилось «некрасиво». Посему (на мой вкус) решение 4 приятнее.

Тут необходим небольшой комментарий.

Решение текстовой задачи предполагает проверку полученного результата. Мы можем считать его ответом в задаче, если полученный результат соответствует условию задачи. Проверка может быть разной, и одна из первых – проверка полученного результата по размерности.

В приведенных решениях 4 и 5 проверка по размерности весьма условна. В самом деле, в знаменателе дроби $\frac{1}{\frac{1}{T}+\frac{1}{20}}$ число 1 делится на величину *T*, а в знаменателе дроби $\frac{1}{v+\frac{1}{20}}$ к скорости работы (производительности труда) v прибавляется число $\frac{1}{20}$.

Причина – принятие всей грядки за 1, т.е. мы считаем ее безразмерной величиной.

Решение 6

Пусть длина всей грядки равна *L*. Так как всю грядку Маша пропалывает за 20 мин, то скорость работы Маши равна $\frac{L}{20}$. Пусть время, за которое Даша пропалывает грядку, равно *T*. Тогда скорость работы Даши (скорость ее движения вдоль грядки) равна $\frac{L}{T}$, скорость совместной работы (скорость совместного движения вдоль грядки) равна $\frac{L}{T}+\frac{L}{20}$, время, за которое они вдвоем закончат работу, равно $\frac{L}{\frac{L}{T}+\frac{L}{20}}$. По условию, это время равно 12 мин, откуда получаем уравнение $\frac{L}{\frac{L}{T}+\frac{L}{20}}=12.$

Решая уравнение $\frac{1}{\frac{1}{T}+\frac{1}{20}}=12$, получаем *T=30.*

Решение 7

Переходим к чисто геометрическому решению задачи. Грядка в нем представлена отрезком прямой.

Теперь можно использовать подобие (рис.1).

Введем обозначения. На этом рисунке:

l – длина всей грядки;

x – расстояние, пройденное Дашей до места встречи с Машей;

t – разность времени Даши и Маши на прополку всей грядки.

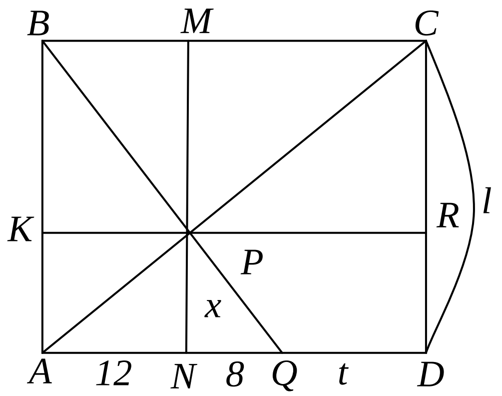

Рис. 1. Геометрическое решение

На этом рисунке видны подобные треугольники: *APN* и *ACD, APN* и *PCR, APN* и *CMP, PNQ* и *BAQ, PNQ* и *BKP, PNQ* и *PMB.*

Выбрав две подходящие пары подобных треугольников, решим задачу. Например, из подобия треугольников первой пары имеем такую пропорцию:

$$\frac{PN}{CD} = \frac{AN}{AD} \Leftrightarrow \frac{x}{L} = \frac{12}{t+20}.$$

Из подобия треугольников четвертой пары имеем такую пропорцию:

$$\frac{PN}{AB} = \frac{NQ}{AQ} \Leftrightarrow \frac{x}{L} = \frac{8}{20}.$$

Сравнивая правые части этих пропорций, получаем:

$$\frac{12}{t+20} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow t + 20 = 30 \Leftrightarrow t = 30.$$

Решение 8

Рассматривая другие аналогичные пары подобных треугольников, также приходим к ответу.

Например, можно рассмотреть подобие треугольников *APQ* и *CPB.* Из этого подобия и теоремы Фалеса запишем равенство $\frac{BC}{AQ} = \frac{PC}{PA} = \frac{MC}{NA} = \frac{ND}{NA}$, откуда получим пропорцию $\frac{t+20}{20} = \frac{t+8}{12}$ и $t = 10$. Отсюда получаем время Даши – 30 мин.

Решение 9

Любопытно, что эту задачу можно решить практически устно, не на основе арифметики или алгебры и не методом координат, а просто исходя из здравого смысла.

Ту часть грядки, которую Даша пропалывает за 12 мин. Маша пропалывает за 8 мин. Видим, что Даша работает в полтора раза медленнее Маши.

Поэтому время, затраченное Дашей на прополку всей грядки, в полтора раза больше времени, затраченного Машей на ту же работу, т. е. $20 \cdot 1{,}5 = 30$.

Здравый смысл можно подкрепить таким соображением. Если каждый из двух объектов движется равномерно, то отношение их скоростей постоянно. Если скорость одного из них обозначить как *v*, то скорость другого будет равна *kv.* И целью задачи может стать нахождение коэффициента *k.* Проще всего его находить, если каким-то образом будет найдено отношение времен этих объектов при прохождении фиксированного пути. Что и сделано в только что приведенном решении.

Это решение можно прояснить на схеме (рис. 2). *P* – место встречи Маши и Даши

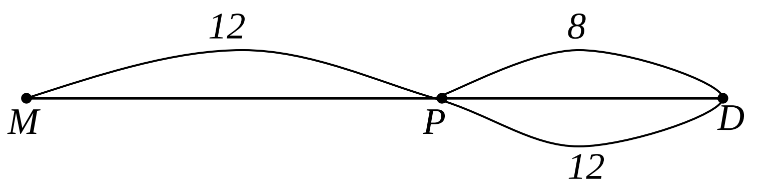

Рис. 2. Одномерная схема

Приведенная схема проясняет ситуацию. Вместе с тем одномерная схема помогает только в простейших случаях. Более сложные ситуации в аналогичных задачах (возможность стояния на месте, движение объекта в противоположные стороны) в одномерной схеме теряют наглядность. Поэтому вернемся к двумерным схемам.

Главную роль в таких схемах будет играть тангенс. Тангенс – это и угловой коэффициент прямой (в частности, касательной к кривой, т. е. производная), и скорость при равномерном (прямолинейном) движении, и отношение двух пропорциональных величин (когда мы выражаем их зависимость графически). Тангенс может заменить также использование подобия прямоугольных треугольников.

Решение 10

Введем обозначения. На рисунке 3 *PN* – часть грядки, которую прополола Даша до встречи с Машей, потратив на это 12 мин. Эту же часть грядки Маша в одиночку пропалывает за 8 мин.

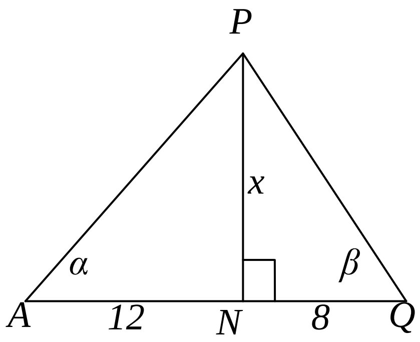

Рис. 3. Применение тригонометрии

Рассмотрим треугольник *APQ*, в котором проведена высота $PN=x$. Тогда скорость работы Маши равна $tg\beta$, а скорость работы Даши равна $tg\alpha$.

Из этого рисунка видно, что $x=12tg\alpha=8tg\beta$. Отсюда следует, что отношение тангенсов $\frac{tg\alpha}{tg\beta}$ равно $\frac{2}{3}$, т.е. скорость Даши составляет $\frac{2}{3}$ скорости Маши. Поэтому время работы Даши в полтора раза больше времени Маши, т.е. равно $20 \cdot 1{,}5 = 30$.

Какие разделы мы повторили?

1. Пропорцию, решения уравнения и систем уравнений.
2. Треугольники.
3. Прямую и обратную пропорциональность В. И. Рыжик предлагает в своей книге 18 способов решений этой задачи. Повторят не только математику, но и физику [1].

Показываем, что чем больше решений одной и той же задачи, тем лучше осознается взаимосвязь разрозненных математических ситуаций. И лучший способ проверить ответ – решить задачу иным способом. На занятии по методике преподавания математики была предложена студентам эта задача. Каждый студент решал самостоятельно. Затем решения анализировались. За одну пару было показано более 5 решений. Привели и аналогичные задачи. Все решения сопровождались чертежами.

Литература

1. *Рыжик В. И.* Учим математике: теория и практика. 7-11 классы. М.: ВАКО, 2015. 240 с.