Singular sets of functions

Sil'chenko E.[1], Zolotuhina V.[2]

Сингулярные множества функций

Сильченко Е. Б.[1], Золотухина В. Г.[2]

[1]Сильченко Евгений Борисович / Silchenko Evgeniy – аспирант;
[2]Золотухина Вера Геннадьевна / Zolotuhina Vera - старший лаборант,
кафедра теории функций,
факультет математики и компьютерных наук,
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
Кубанский государственный университет, г. Краснодар

Аннотация: *в статье подчеркивается необходимость изучения сингулярных множеств решений эволюционных уравнений. Приводятся доказательства некоторых утверждений о сингулярных множествах функций.*
Abstract: *the article stresses the necessity to study the singular sets of solutions of evolution equations. Proofs of some statements about singular sets of functions are given.*

Ключевые слова: *система Навье-Стокса, сингулярное множество функции.*
Keywords: *Navier-Stokes system, function singular set.*

Как известно, на данный момент не доказана глобальная и однозначная разрешимость задачи Коши для системы Навье-Стокса движения вязкой несжимаемой жидкости (в классическом смысле) [1]:

$$\begin{cases} \boldsymbol{u_t + (u \cdot \nabla)u - \nu\Delta u + \nabla p = 0}, \\ \quad\quad \mathbf{div}\, \boldsymbol{u = 0}, \end{cases} \qquad (1)$$

где $u = (u_1, u_2, u_3)$ – вектор-функция скорости, p – скалярная функция давления, ν – константа вязкости.

В статьях [1], [2], [3], [4], [5] обосновано, почему необходимо изучать возможную геометрию множеств решений системы Навье-Стокса. Этот вопрос совершенно открыт, потому можно начать с изучения сингулярных множеств решений произвольных функций, возможно заданных на произвольных метрических и топологических пространствах.

Пусть X – произвольное метрическое пространство.

Точка $x_0 \in X$ – называется *регулярной* для функции $f: X \to \mathbb{R}$, если в некоторой окрестности точки x_0 эта функция ограниченна.

Точка $x_0 \in X$ – называется *сингулярной* для функции $f: X \to \mathbb{R}$, если в любой окрестности точки x_0 эта функция неограниченна.

$$\forall \varepsilon > 0\ \forall M_0 \in \mathbb{R}\ \exists x \in O_\varepsilon(x_0)\ |f(x)| > M_0. \qquad (2)$$

Множество сингулярных точек функции f называется её *сингулярным множеством* и обозначается $\mathrm{sing}(f)$. Приведём несколько примеров сингулярных множеств.

Пример 1. Сингулярное множество гиперболы состоит из одной точки.

Пример 2. Сингулярное множество синусоиды – пустое.

Пример 3. Рассмотрим функцию

$$f_3 = \begin{cases} 0, x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, \\ Den(x), x \in \mathbb{Q}, \end{cases} \qquad (3)$$

где функция $Den(x)$ принимает значение знаменателя несократимого представления рационального числа x.

$$Den(x) = \min\{n \in \mathbb{N} : nx \in \mathbb{Z}\}.(4)$$

Утверждение 1.

Сингулярное множество функции f_3 – вся числовая ось.

$$\mathrm{sing}(f_3) = \mathbb{R}.(5)$$

Доказательство.

Пусть $f = f_3$, и $a \in \mathbb{R}$ – произвольная точка. Покажем, что она является сингулярной для функции f, то есть в любой сколь угодно малой ε-окрестности точки a функция f может принимать сколь угодно большие значения. Для этого покажем, что в любой сколь угодно малой

ε-окрестности точки a найдется рациональное число r, несократимая запись которого имеет сколь угодно большой знаменатель. Пусть заданы произвольные $\varepsilon > 0$ и $M > 0$. Подберем простое натуральное число

$n > \max\left\{\frac{1}{\varepsilon}, M\right\}$, что всегда можно сделать по теореме Евклида о бесконечности множества простых чисел. Заметим, что при этом будут справедливы неравенства:

$\frac{1}{n} < \varepsilon$ и $n > M$. По принципу Архимеда для чисел $\frac{1}{n}$ и a найдется такое $k \in \mathbb{Z}$, такое что $\frac{k}{n} \le a < \frac{k+1}{n}$. Покажем, что оба рациональных числа: $\frac{k}{n}$ и $\frac{k+1}{n}$ находятся в ε-окрестности точки a, то есть $a - \varepsilon < \frac{k}{n} \le a < \frac{k+1}{n} < a + \varepsilon$. Складывая неравенства $\frac{k}{n} \le a$ и $\frac{1}{n} < \varepsilon$, получим $\frac{k+1}{n} < a + \varepsilon$.

Складывая неравенства $a < \frac{k+1}{n}$ и $-\varepsilon < -\frac{1}{n}$, получим $a - \varepsilon < \frac{k}{n}$. Теперь покажем, что хотя бы одно из чисел: $\frac{k}{n}$ и $\frac{k+1}{n}$ является несократимой дробью. Допустим противное: $\frac{k}{n}$ и $\frac{k+1}{n}$ сократимые. Так как n есть простое число, то оно может сократиться лишь делением на себя. Следовательно, оба знаменателя также делятся на n, то есть $k = nl$ и $k + 1 = nt$, где $l, t \in \mathbb{N}$, откуда следует, $nl - nt = 1$ то есть $n(l - t) = 1$,

что невозможно, поскольку $n > 1$.

Итак, показано, что оба рациональных числа: $\frac{k}{n}$ и $\frac{k+1}{n}$ лежат в

ε-окрестности точки a, при этом $n > M$ и хотя бы одно из них является несократимой дробью. Взяв в качестве r то из них, которое является несократимой дробью, получим $Den(r) = n > M$.

Утверждение 1 доказано.

Возникает вопрос: *Какие вообще бывают сингулярные множества функций в метрических пространствах?* Частичный ответ на него дают следующие утверждения.

Утверждение 2.

Сингулярное множество функции всегда замкнуто.

Доказательство.

Так как любая точка может быть либо сингулярной, либо регулярной, докажем эквивалентное утверждение:

Множество регулярных точек функции всегда открыто.

Докажем сначала, что любая точка, лежащая в окрестности регулярной точки, в которой функция ограничена, тоже является регулярной. Окрестность – открытое множество. По определению открытого множества, любая точка из этой окрестности лежит в некоторой окрестности, полностью лежащей в исходной окрестности. Следовательно, точка из новой окрестности тоже будет регулярной. Значит, множество регулярных точек открыто, а сингулярное множество – замкнуто.

Утверждение 2 доказано.

Замечание. Утверждение 2 справедливо для всех топологических пространств.

Утверждение 3.

Для каждого замкнутого множества в $\mathbb{R}$ существует функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для которой только это множество будет сингулярным.

Доказательство.

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \in A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \\ Den(x), x \in A \cap \mathbb{Q} \\ \dfrac{1}{\rho(x, A)}, x \notin A \end{cases} . (6)$$

Здесь $\rho(x, A) = \inf_{a \in A} \rho(x, a)$.

Функция f определена корректно, поскольку $x \notin A$ $\rho(x, A) > 0$ ввиду замкнутости A.

Покажем, что множество A является множеством сингулярных точек функции f.

Пусть заданы произвольные $\varepsilon > 0$ и $M > 0$. Пусть $a \in A$.

Если a является точкой прикосновения множества $\mathbb{R} \setminus A$, то $\forall \delta > 0$ в δ-окрестности точки a найдется точка $x \in \mathbb{R} \setminus A$. При этом будем иметь $f(x) = \frac{1}{\rho(x,A)} > \frac{1}{\delta}$. Очевидно, можно подобрать $\delta > 0$ так, чтобы $\delta < \varepsilon$ и $\frac{1}{\delta} > M$, то есть $x \in O_\varepsilon(a)$ и $f(x) > M$. Таким образом, a является сингулярной точкой f.

Если a не является точкой прикосновения множества $\mathbb{R} \setminus A$, то найдется ε-окрестность точки a, в которой нет ни одной точки множества $\mathbb{R} \setminus A$, то есть эта окрестность целиком состоит из точек множества A. Из рассуждений при доказательстве утверждения 1 следует, что в этой δ-окрестности точки a, а также и в любой ее меньшей окрестности, найдется рациональное число r такое, что $Den(r) > M$. Таким образом, и в этом случае a является сингулярной точкой f.

Пока показано лишь то, что всякая точка A является сингулярной. Но нужно еще показать, что всякая сингулярная точка принадлежит A. Для этого покажем, что, если $b \notin A$, то есть $b \in \mathbb{R} \setminus A$, то b не сингулярная, а значит, регулярная точка f.

Если $b \notin A$, тогда $\rho(b, A) = \mu > 0$ ввиду замкнутости A.

Положим $\delta = \frac{\mu}{2}$ и покажем, что $\forall x \in O_\delta(b)$ $\rho(x, A) \ge \frac{\mu}{2}$.

Допустим противное: $\rho(x, A) < \frac{\mu}{2}$. Тогда найдется $a^{'} \in A$ такой, что. $\rho(x, a^{'}) < \frac{\mu}{2}$. Применяя неравенство треугольника, получим $\rho(b, a^{'}) \leq \rho(b, x) + \rho(x, a^{'}) < \mu$, что противоречит равенству $\rho(b, A) = \mu$.

Итак, $\forall x \in O_{\delta}(b)$ верна оценка $f(x) = \frac{1}{\rho(x,A)} \leq \frac{2}{\mu}$

Таким образом, b есть регулярная точка f.

Утверждение 3 доказано.

Менее очевидным является вопрос:

Для каких замкнутых множеств будет верно утверждение 3?

Для метрических и топологических пространств с изолированными точками ответ отрицательный. Для сепарабельных метрических пространств (без изолированных точек) ответ положительный. Если метрическое пространство допускает расслоение с сепарабельным слоем, ответ положительный [1].

Литература

1. *Золотухина В. Г.* Сингулярные множества решений эволюционных уравнений и теоремы единственности // Геометрический анализ и его приложения: материалы III Международной школы-конференции. 2016. С. 81-83.
2. *Biryuk A.* On invariant measures of the 2D Euler equation // Journal of Statistical Physics. 2006. T. 122. № 4.C. 597-616.
3. *Biryuk A., Craig W., Ibrahim S.* Construction of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations // Contemporary Mathematics. 2007. T. 429. C. 1-18.
4. *Biryuk A.* Lower bounds for derivatives of solutions for nonlinear Schrödinger equations // Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Section A: Mathematics. 2009. T. 139. № 2. C. 237-251.
5. *Biryuk A., Craig W.* Bounds on Kolmogorov spectra for the Navier-Stokes Equations // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2012. T. 241. № 4. C. 426-438.