Correcness of solution of two-dimensional integral equation of the first kind with analytical functions

Askar kyzy Lira

Корректность решения двумерного интегрального уравнения первого рода с аналитическими функциями

Аскар кызы Л.

*Аскар кызы Лира / Askar kyzy Lira – старший преподаватель,
кафедра кибернетики и информационных технологий,
Кыргызский национальный университет им. Ж. Баласагына, г. Бишкек, Кыргызская Республика*

Аннотация: *в статье доказано, что решение двумерного интегрального уравнения первого рода с ядром - экспоненциально-квадратично-убывающей функцией от разности аргументов - существует и непрерывно зависит от правой части в пространстве целых аналитических функций экспоненциального типа.*

Abstract: *the following is proven. The solution of a two-dimensional integral equation of the first kind with a kernel being an exponentially-quadratic-decreasing, depending on difference of arguments function exists and depends on right hand part continuously in the space of analytical functions of exponential type.*

Ключевые слова*: интегральное уравнение первого рода, двумерное интегральное уравнение, аналитическая функция, корректность.*

Keywords: *integral equation of the first kind, two-dimensional integral equation, analytical function, correctness.*

Введение

Известно, что линейный интегральный оператор типа Фредгольма с непрерывным ядром на ограниченной области является вполне непрерывным. Следовательно, задача решения соответствующего интегрального уравнения с заданной правой частью - непрерывной функцией - не может быть корректно поставлена. Таким образом, корректной может быть только задача решения линейного интегрального уравнения первого рода либо на неограниченной области, либо в других пространствах. Для одномерных уравнений такие результаты были получены в некоторых работах, в том числе в нашей статье [4]. В настоящей статье аналогичные результаты получены для двумерного случая.

1. Обозначения и вспомогательные результаты

В соответствии с [3], обозначается: A_v (для $v>0$) – пространство целых аналитических функций экспоненциального типа с показателем v, то есть удовлетворяющих условию: $(\forall f(z)\in A_v)(\exists c>0)(\forall z\in C)(|f(z)| < c\, e^{v|z|})$.

Норма в пространстве A_v: $||f||_v := \sup\{|f(z)|\, e^{-v|z|}: z\in C\}$.

A_{+v} – пространство целых аналитических функций $f(z)$ таких, что в некоторой точке (можно принять – в начале координат) последовательность их производных имеет скорость роста не выше степенного: $(\forall f(z)\in A_{+v})\ (\exists c>0)(\forall k\in N_0:=\{0,1,2,3\ldots\})(\,|f^{(k)}(0)| \le cv^k)$.

Норма в пространстве A_{+v}: $||f||_{+v} := \sup\{|f^{(k)}(0)|\, v^{-k}: k\in N_0\}$.

Соответственно, будем обозначать A_{2v} – пространство аналитических функций двух переменных с условием $(\,|f(z,w)| < c\, e^{v(|z|+|w|)})$;

A_{2+v} – пространство аналитических функций двух переменных с условием: $\left|\dfrac{\partial^{k+n} f(0,0)}{\partial z^k \partial w^n}\right| < cv^{k+n}$

.

Нормы в этих пространствах будем также обозначать $||\cdot||_v$; $||\cdot||_{+v}$.

В пространстве A_{2+v} норма оператора дифференцирования по одной из переменных:

$$\|D_z f\|_{+v} = \left\| D_z\left(\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{k!n!}\frac{\partial^{k+n} f(0,0)}{\partial z^k \partial w^n} z^k w^n\right)\right\|_{+v} = \left\|\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{k!n!}\frac{\partial^{k+n} f(0,0)}{\partial z^k \partial w^n} k z^{k-1} w^n\right\|_{+v} =$$

$$= \left\|\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{k!n!}\frac{\partial^{k+1+n} f(0,0)}{\partial z^{k+1} \partial w^n} z^k w^n\right\|_{+v} = \sup\left\{\left|\frac{\partial^{k+1+n} f(0,0)}{\partial z^{k+1}\partial w^n}\right| v^{-k-n} : k,n\in N_0\right\} \le$$

$$\le \sup\left\{\|f\|_{+v} v^{k+1+n} v^{-k-n} : k,n\in N_0\right\} = v\|f\|_{+v}. \qquad (1)$$

Ограниченность оператора дифференцирования в пространствах $A_{+\nu}$, $A_{2+\nu}$ и обеспечивает корректность ряда задач, которые являются некорректными в других пространствах.

2. Обзор результатов по одномерным интегральным уравнениям

Для уравнений типа свертки на оси

$$\int_R K(x-s)u(s)ds = f(x) \qquad (2)$$

очевидны следующие факты, связанные с интегральными преобразованиями Φ [1]. Если функции K, f принадлежат соответствующим пространствам, то из уравнения (1) следует $\Phi K(\cdot)(\xi)\Phi u(\cdot)(\xi)=\Phi f(\cdot)(\xi)$. Если функция $\Phi f(\cdot)(\xi)(\Phi K(\cdot)(\xi))^{-1}$ существует и также принадлежит соответствующему пространству, то получаем решение $u(x)= \Phi^{-1}(\Phi f(\cdot)(\xi)(\Phi K(\cdot)(\xi))^{-1})$.

В [2] рассмативается уравнение вида

$$\int_L K(x,s,\varepsilon)((x-s)^2+\varepsilon^2)^{-n/2}u(s,\varepsilon)ds = G(x), n=1,2,..., \qquad (3)$$

где L - пространственная кривая (антенный граф), неизвестная функция $u(x,\varepsilon)$ представляет протекающий по кривой ток, $\varepsilon>0$ – малый параметр – отношение радиуса проводника к длине волны). Объявлена теорема о том, что в специально составленном классе обобщенных функций при $|K(x,x,0|\geq\delta>0$ уравнение (3) имеет решение, устойчивое по $G(x)\in L_2(L)$.

В [4] доказано следующее. Если функция $f(x)$ - целая аналитическая экспоненциального типа, то существует целое аналитическое решение интегрального уравнения первого рода

$$K_b w(\cdot)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-b(x-s)^2)w(s)ds = f(x). \qquad (4)$$

Это решение выражается формулой

$$w(x) = K_b^{-1} f(\cdot)(x) := \sqrt{\frac{b}{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(4b)^k} f^{(2k)}(x). \qquad (5)$$

Оно устойчиво по $f(z)$ в пространстве $A_{+\nu}$.

3. Построение двумерного интегрального уравнения

Рассмотрим уравнение теплопроводности с обратным временем на плоскости

$$\frac{\partial u(t,x,y)}{\partial t} = -a\left(\frac{\partial^2 u(t,x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(t,x,y)}{\partial y^2}\right), (t,x,y)\in(0,\infty)\times R^2 \qquad (6)$$

с начальным условием

$$u(0,x,y) = \varphi(x,y), (x,y)\in R^2, \qquad 7)$$

где $\varphi(z,w)\in A_{2+\nu}$ и принимает вещественные значения при вещественных значениях аргумента.

Формальный ряд для решения. Будем искать решение (6)-(7) в виде

$$u(t,x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x,y)t^k, \qquad (8)$$

где $u_k(x,y)$ – искомые целые аналитические функции. (Сходимость этого ряда и рядов, получающихся из него дифференцированием по x и по y, пока не рассматривается).

Подставляя (8) в (7), получаем, что

$$u_0(x,y) = \varphi(x,y \qquad (9)$$

Подставляя (8) в (6) и также формально дифференцируя ряд почленно, получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,y)kt^{k-1} = -a\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\partial^2 u_k(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_k(x,y)}{\partial y^2}\right)t^k. \qquad (10)$$

Заменяя переменную суммирования в левой части ($k-1$ на k), имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_{k+1}(x,y)(k+1)t^k = -a\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\partial^2 u_k(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_k(x,y)}{\partial y^2}\right)t^k.$$

Приравнивая сомножители при одинаковых степенях t^k, получаем соотношения

$$u_{k+1}(x,y) = -\frac{a}{k+1}\left(\frac{\partial^2 u_k(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_k(x,y)}{\partial y^2}\right), \mathrm{k}=0,1,2,.. \qquad (11)$$

Обозначим дифференциальный оператор $D_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Из оценки (1) получаем: операторная норма

$$||D_2||_{2+v} = 2v^2. \qquad (12)$$

ТЕОРЕМА 1. Если функция $\varphi(z)$ - целая аналитическая экспоненциального типа, то существует целое аналитическое решение задачи (6)-(7), которое выражается формулой (следующей из (11)):

$$u(t,x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(-a)^k D_2^k \varphi(x,y) t^k. \qquad (13)$$

Доказательство. Докажем, что этот ряд сходится.

Используя оценку (12), получаем

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(-a)^k D_2^k \varphi(x,y) t^k \right\| \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} a^k (2v^2)^k t^k = \exp(2av^2 t) < \infty.$$

Так же доказывается сходимость рядов, полученных из (13) дифференцированием. Теорема доказана.

Зафиксируем некоторое $T>0$ и обозначим $w(x)=u(T,x)$. Тогда получим в силу известной интегральной формулы для решения уравнения начальной задачи для уравнения теплопроводности:

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{\left(2\sqrt{Ta\pi}\right)^2} \iint_{R\times R} exp\left(-\frac{(x-p)^2+(x-q)^2}{4aT}\right) w(p,q)dpdq.$$

Обозначим $b := \frac{1}{4aT}$, $f(x,y) := \frac{\pi}{b}\varphi(x,y)$. Тогда получим: $T = \frac{1}{4ab}$,

$$f(x,y) = \iint_{R\times R} exp\left(-b\left((x-p)^2+(x-q)^2\right)\right) w(p,q)dpdq.$$

Отсюда следует

ТЕОРЕМА 2. Если функция $f(x)$ - целая аналитическая экспоненциального типа, то существует целое аналитическое решение интегрального уравнения первого рода

$$K_b w(\cdot)(x,y) := \iint_{R\times R} exp\left(-b\left((x-p)^2+(x-q)^2\right)\right) w(p,q)dpdq = f(x,y). \qquad (14)$$

Это решение выражается формулой

$$w(x,y) = K_b^{-1} f(\,\cdot\,)(x,y) := \frac{b}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(4b)^k} D_2^k f(x,y).$$

Оно устойчиво по $f(x,y)$ в пространстве A_{+v}.

Пример. Положим $b=1$, $f(x,y)=x^2+5xy$. Тогда

$$w(x,y) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{1} \frac{(-1)^k}{k!(4b)^k} D_2^k (x^2+5xy) = \frac{1}{\pi}\left((x^2+5xy) - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(x^2+5xy)\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left((x^2+5xy) - \frac{1}{4}(2x)\right) = \frac{1}{\pi}\left(x^2 - \frac{1}{2}x + 5xy\right).$$

Приложение

```
PROGRAM lira2D;
USES CRT, Dos{, s1_var, s2_tasks};
var ip,iq,k,n,j:longint;
b,x,y,h,p,q,s: double;
function w(xx,yy:double):double;
begin w:=(sqr(xx)-1.0/2.0+5.0*xx*yy)/pi end;
begin {main}
clrscr; writeln;
writeln(' Askar_kyzy 2D 02.07.2016 ');
writeln(' Integral exp(-(x-p)^2-(y-q)^2)w(p,q)dpdq = x^2+5xy ');
writeln;
repeat
```

```
write(' Input x, y (0 0 -> exit): '); readln(x,y);
h:=0.05;
s:=0.0;
for ip:=-200 to 200 do
for iq:=-200 to 200 do
begin p:=ip*h;q:=iq*h;
s:=s+sqr(h)*exp(-sqr(x-p)-sqr(y-q))*w(p,q)
end;
writeln(s:10:4);
until (x=0.0) and (y=0.0);
readln
end.
```

Литература

1. *Манжиров А. В., Полянин А. Д.* Справочник по интегральным уравнениям: Методы решения. – М.: Изд-во «Факториал Пресс», 2000. – 384 с.
2. *Стрижков В. А*. Корректность интегральных уравнений Фредгольма I рода типа потенциала для тонких проводников // Ж. Вычисл. матем. и матем. физ. – 1988, 28:9. – С. 1418–1420.
3. *Евграфов М. А.* Асимптотические оценки и целые функции, 3-е издание. – М., 1979.
4. *Кененбаева Г. М., Аскар кызы Л.* Класс интегральных уравнений первого рода, имеющих решение при любой правой части // Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики: труды Международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения академика Г. И. Марчука, Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН. - Новосибирск: Абвей, 2015. - С. 321-325.