

Modeling and vibration analysis of the surface of a moving load with different speed modes

Nizamaev T.

Моделирование и анализ колебаний поверхности для движущейся нагрузки при различных скоростных режимах

Низамаев Т. М.

Низамаев Тимур Маратович / Nizamaev Timur – аспирант,
Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва

Аннотация: ниже анализируются зависимости между скоростями движения штампа по упругому полупространству и колебаниями поверхности с помощью компьютерного моделирования внешней задачи Лэмба. Рассматриваются четыре основных скоростных диапазона движения штампа, а также выведена компонента перемещений для случая скоростного резонанса.

Abstract: below analyzes the relationship between the speeds of the stamp on the elastic half-space and fluctuations of the surface by computer simulation of external lamb's problem. Discusses four main speed ranges of movement of the stamp and derived component of the displacements for the case of high-speed response.

Ключевые слова: задача Лэмба, волны Рэлея, скоростной резонанс.

Keywords: lamb problem, Rayleigh waves, velocity resonance.

Постановка задачи

Рассмотрим однородную изотропную упругую среду, в которой существуют два типа объемных волн: продольные волны, в которых смещение частиц происходит в направлении распространения волны, и поперечные, в которых частицы претерпевают смещение в плоскостях, перпендикулярных направлению распространения волны. Волны, распространяющиеся вдоль плоской границы упругого полупространства и имеющие скорость меньше скорости распространения поперечной объемной волны, были открыты Рэлеем в 1885 г. [1] и названы рэлеевскими волнами. Данный тип волн представляет собой частный случай поверхностных волн и скорость рэлеевской волны напрямую зависит от скорости поперечной $C_R \approx 0.6C_S$ (C_S - скорость поперечной волны). Волна Рэлея представляет собой результат наложения продольных и поперечных волн, частицы среды которой движутся по эллиптическим орбитам в вертикальной плоскости, параллельной распространению волны.

Для определения скорости поверхностной волны Рэлея получил полином шестой степени:

$$\eta^6 - 8\eta^4 - 8(3 - 2\xi^2)\eta^2 - 16(1 - \xi^2) = 0 \quad (1.1)$$

В своей статье [1] Лэмб воспользовался техникой интегральных преобразований Фурье по пространственным временным и нашел интегральные преобразования, которые в то время обратить не удалось.

Позже было выявлено уравнения движения Навье в изотропной среде, которое для построения решений записывались в форме Ламе-Клайперона:

$$(\lambda + 2\mu)\nabla\text{div}u - \mu\text{rotrot}(u) + b = \rho\ddot{u} \quad (1.2)$$

Где λ и μ - константы Ламе, u - поле перемещений, b - поле массовых сил, ρ - плотность среды. Далее использовалось представление Гельмгольца для поля массовых сил

$$b = -\nabla\alpha - \text{rot}\beta, \quad (1.3)$$

где α и β - скалярный и векторный потенциалы соответственно. И представление Ламе-Грина для динамического поля перемещений:

$$u = \nabla\varphi + \text{rot}\psi \quad (1.4)$$

где φ и ψ - скалярный и векторный потенциалы.

Описание массива. Основные формулы

Для численного конечноэлементного моделирования в программном комплексе Abaqus 6.12 был взят массив, размеры которого соответствуют условиям, которые позволяют избежать интерференции отраженных волн от границ упругого полупространства:

$$L \geq 2C_p T \text{ и } H \geq C_p T \quad (1.5)$$

где L - длина массива, H - высота массива, C_p - скорость волны Рэлея, T - время.

Массив разбивается регулярной сеткой на конечные элементы, размер которых составлял 0.01 м, что давало точный анализ эффектов на поверхности массива. Данному массиву задаются физико-механические характеристики среды:

$$\rho = 1; \nu = 0; E = 1; \lambda = 0; \mu = 0.5 \quad (1.6)$$

Скорости продольной и поперечной волн в данном случае вычисляются по формулам:

$$C_P = \sqrt{\frac{\lambda - 2\mu}{\rho}} \text{ и } C_S = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (1.7)$$

Где λ и μ – константы Ламе, ρ – плотность среды.

Скорость волн Релея может быть вычислена по приближенной формуле Бергмана-Викторова:

$$C_R \approx \frac{0.87 + 1.12\nu}{1 + \nu} C_S \quad (1.8)$$

Зная физико-механические характеристики среды, можно определить скорости:

$$C_P = 1; C_S = 0.71 \text{ и } C_R = 0.617 \quad (1.9)$$

Подобное моделирование было произведено в научной статье Терентьевой Е. О [2], по которому определялась корректность построения компьютерной модели и правильность полученных результатов.

Для простоты разделяют четыре типа скорости движения нагрузки в зависимости от скоростей продольных, поперечных и волн Релея:

- Дозвуковая скорость (subsonic velocity) $v < C_R$
- Первый сверхзвуковой диапазон $C_R < v < C_S$
- Второй сверхзвуковой диапазон $C_S < v < C_P$
- Третий сверхзвуковой диапазон (transonic velocity) $C_P < v$.

Дозвуковая скорость (subsonic velocity) $v < C_R$

Если рассматривается случай, когда штамп перемещается с постоянной скоростью по гладкой поверхности упругого полупространства без каких-либо трещин, то скорость движения штампа в несколько раз меньше скорости распространения волн Рэлея.

При дозвуковых скоростях переходные динамические эффекты и сформированные волны Релея заметны только после некоторого времени после начала движения штампа.

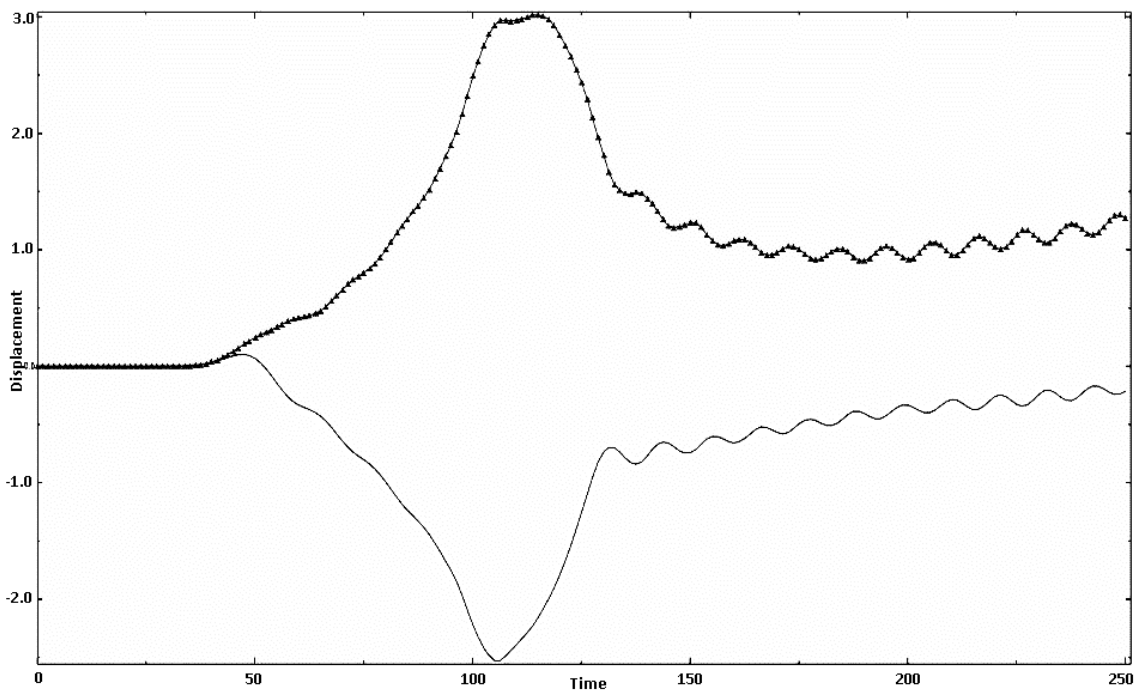


Рис. 1. Смещения элементов вдоль оси Y на расстоянии 30 (м)

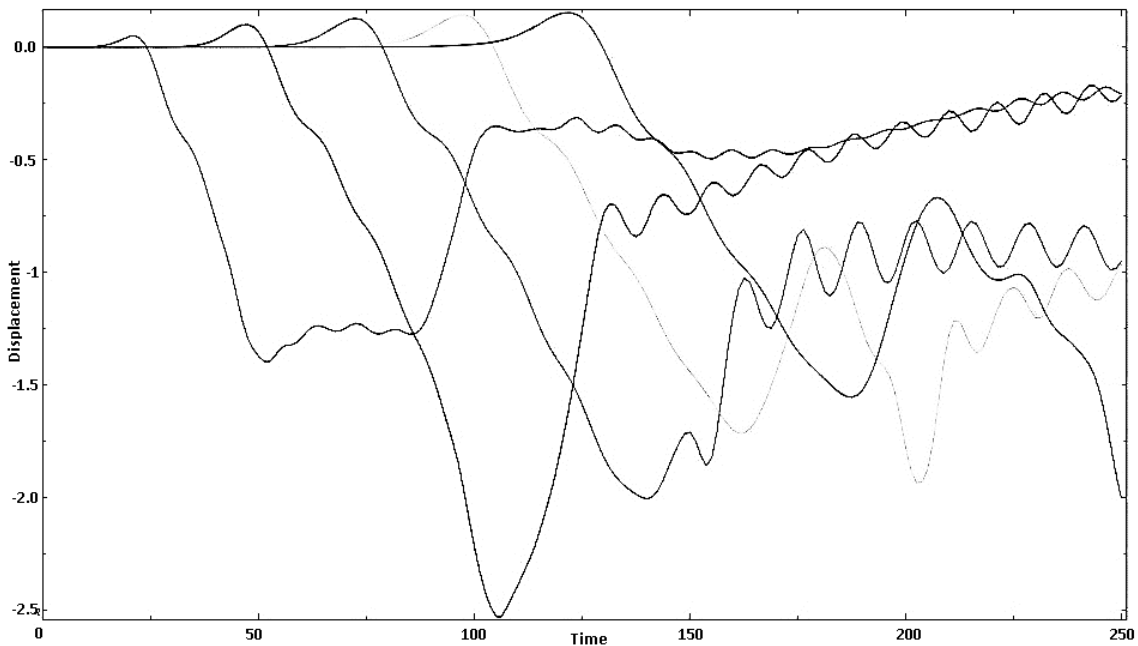


Рис. 2. Смещения элементов вдоль оси Y на расстоянии 30 (м), 45 (м), 60 (м), 75 (м)

Ярко выраженный «горб» на рис. 1 – явный признак наложения продольных и поперечных волн, то есть признак волн Рэлея. Магнитуда колебаний элемента, который расположен на расстоянии 30 метров от начала движения штампа, демонстрирует характерную черту при подобном явлении - скачок магнитуды после прохождения отметки штампом.

Рис. 2 демонстрирует возрастание высоты волны пропорционально расстоянию от начальной точки отсчета, которая образуется перед движущимся штампом.

Первый сверхзвуковой диапазон

Данный скоростной диапазон относительно узкий, в котором разница между C_R и C_S не столь велика,

$\frac{C_R}{C_S} = \frac{0.617}{0.71} = 0.86$. Следовательно, смещения конечных элементов вдоль оси Y усиливаются при

приближении скорости штампа к скорости волн Релея. В отличие от дозвукового режима скорости, фронт волн Релея образуется строго перед подвижной нагрузкой.

Главное отличие данного скоростного режима от дозвукового – это образование максимального углубления, которое движется перед штампом на некотором удалении, и максимальный «горб» после углубления.

Заметно, что при приближении скорости движения штампа по упругой плоскости возрастают колебания не только на поверхности, но и непосредственно под штампом и даже на участке пути, который уже пройден.

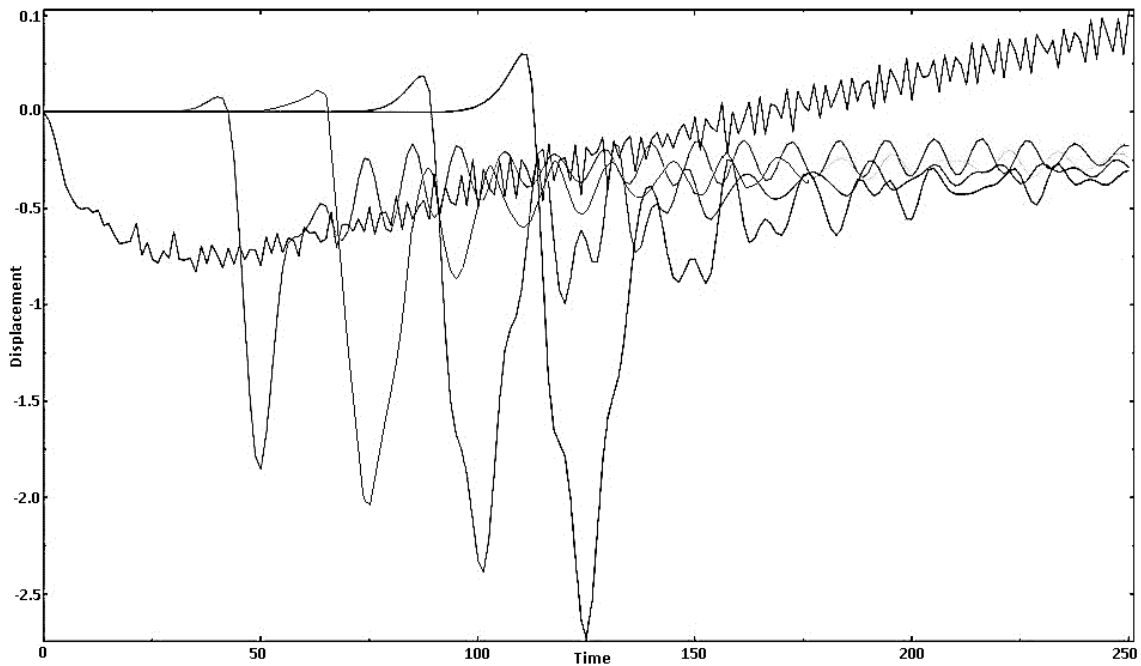


Рис. 3. Смещения элементов вдоль оси Y на расстоянии 30 (м), 45 (м), 60 (м), 75 (м) и амплитуда колебаний штампа

По рис. 3 можно утверждать, что после того как штамп проходит определенный путь, колебания конечных элементов не утихают (как в дозвуковом режиме), а только с большей силой распространяются.

Именно в первом сверхзвуковом диапазоне мы можем наблюдать ярко выраженные элементы поверхностных волн Рэлея – двойной «горб» магнитуды. Как мы знаем, магнитуда – это величина совокупной энергии колебаний, и подобные явления, как двойной «горб», получаются не случайно, а в случае наложения нескольких частот колебаний, как на рис. 4.

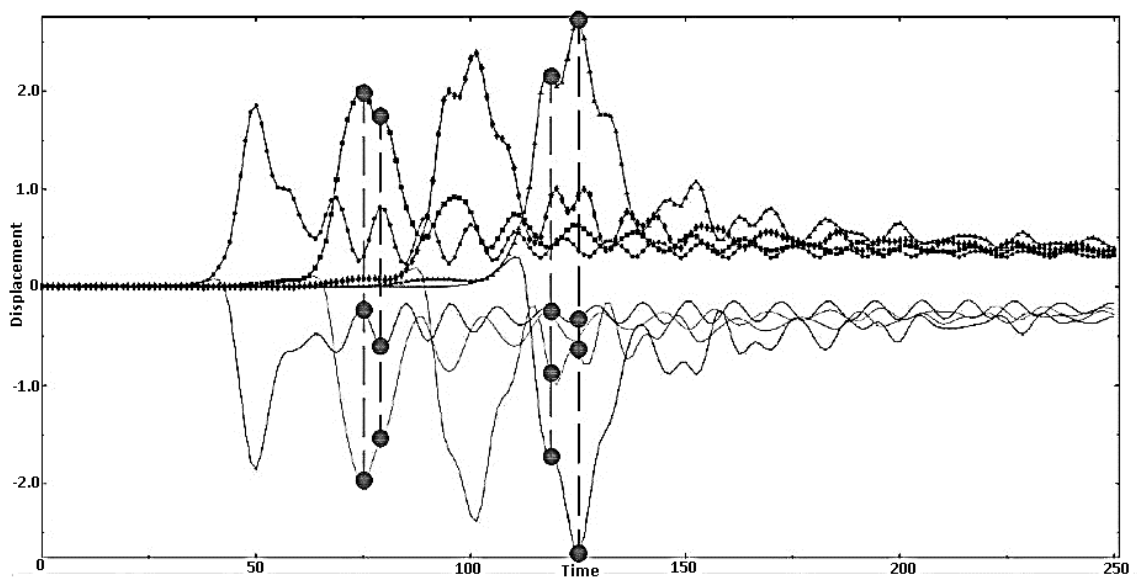


Рис. 4. Смещения элементов вдоль оси Y и магнитуды. 30 м, 45 м, 60 м, 75 м

Из-за наложения волн и увеличения амплитуды колебаний поверхностных волн происходит резонанс, и программный комплекс Abaqus подобный случай не может рассмотреть.

Поверхностные волны, возникающие у переднего края штампа в различные моменты времени и распространяющиеся в направлении его движения, имеют общий фронт, который перемещается с передним краем штампа - это причина нарастания напряжений при движении штампа со скоростью, приближенной к рэлеевской.

Второй сверхзвуковой диапазон

Второй сверхзвуковой диапазон характерен тем, что скорость штампа находится в пределе между скоростями поперечных и продольных волн. Этот скоростной диапазон демонстрирует уменьшение амплитуды

смещения конечных элементов на поверхности полупространства из-за подвижных инерционных сил, сопротивляющихся движущемуся штампу, которые увеличиваются с ростом скорости штампа.

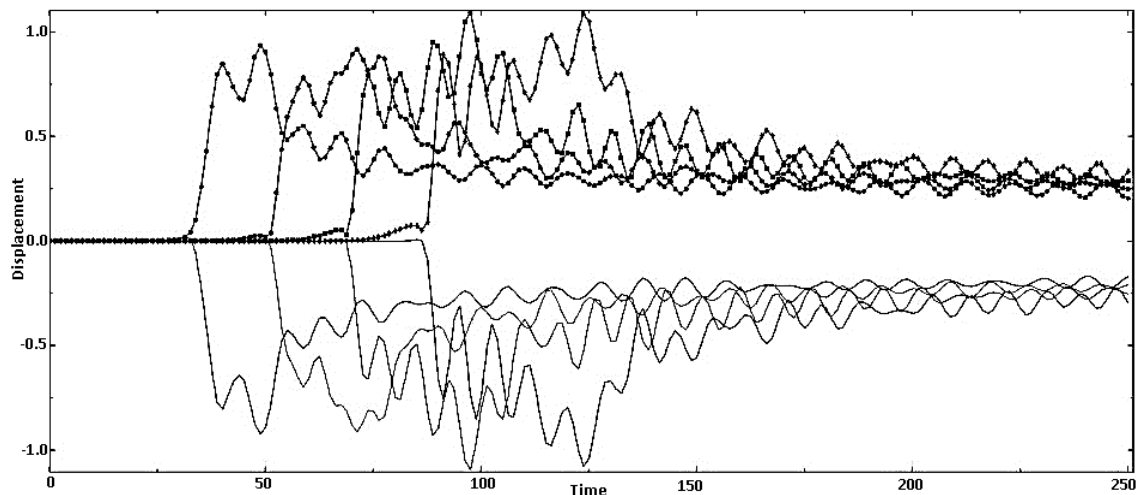


Рис. 5. Смещения элементов вдоль оси Y и магнитуды. 30 м, 45 м, 60 м, 75 м

Отличия первого и второго сверхзвукового диапазонов не столь заметны. Из-за увеличения скорости движения штампа, которая превышает скорость распространения волн Рэлея и поперечных волн, углубление элемента почти в два раза меньше в глубь полуплоскости, чем в предыдущем скоростном диапазоне.

Рис. 5 интересен тем, что на нем отчетливо видны нефизические осцилляции, которые являются признаком явных разностных схем. Подобный эффект сильно затрудняет интерпретацию волнового движения конечного элемента после прохождения штампа.

Третий сверхзвуковой диапазон (transonic velocity)

Так как скорость штампа больше, чем скорость продольных волн, никакие возмущения на поверхности перед грузом не мешают его движению. С увеличением скорости движения штампа уменьшаются и амплитуды колебаний конечных элементов на поверхности. Отличительной особенностью данного скоростного режима является обратный выгиб поверхности за фронтом волны.

На Рис. 6 продемонстрированы колебания точки на поверхности полуплоскости вдоль оси Y , из которого следует, что перед движущимся штампом уже образуется фронт волн, из-за которого поверхность колеблется и проседает.

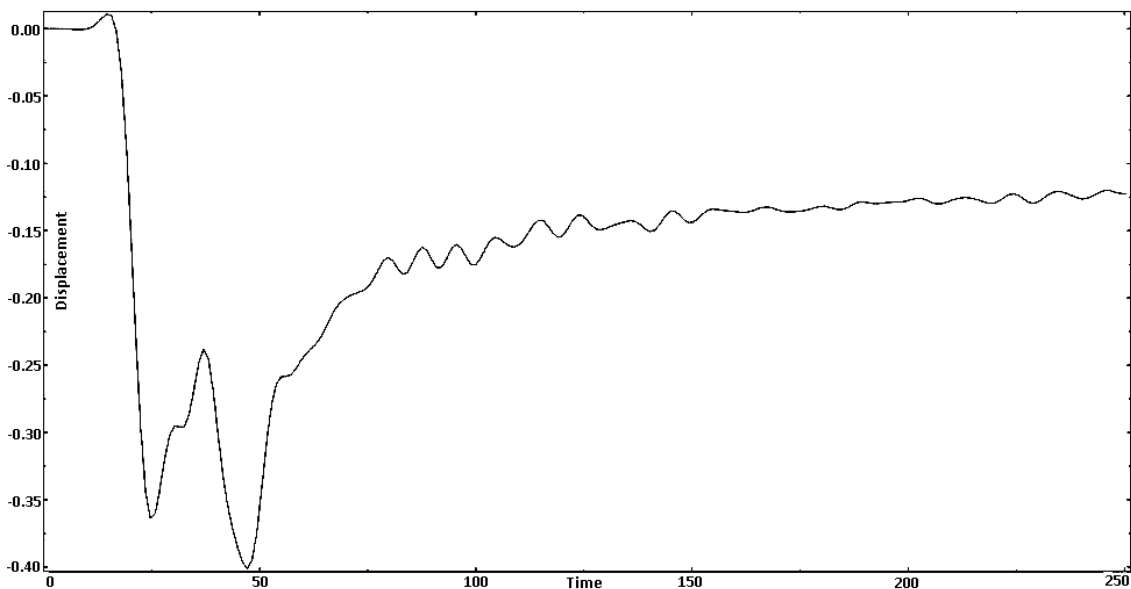


Рис. 6. Смещения элементов вдоль оси Y . 30 м

На рис. 6 виден горб, который образуется продольными волнами, идущими впереди штампа. Резкие скачки амплитуды колебаний свидетельствуют, как разные фронты волн набегают друг на друга и пытаются прийти в равновесие.

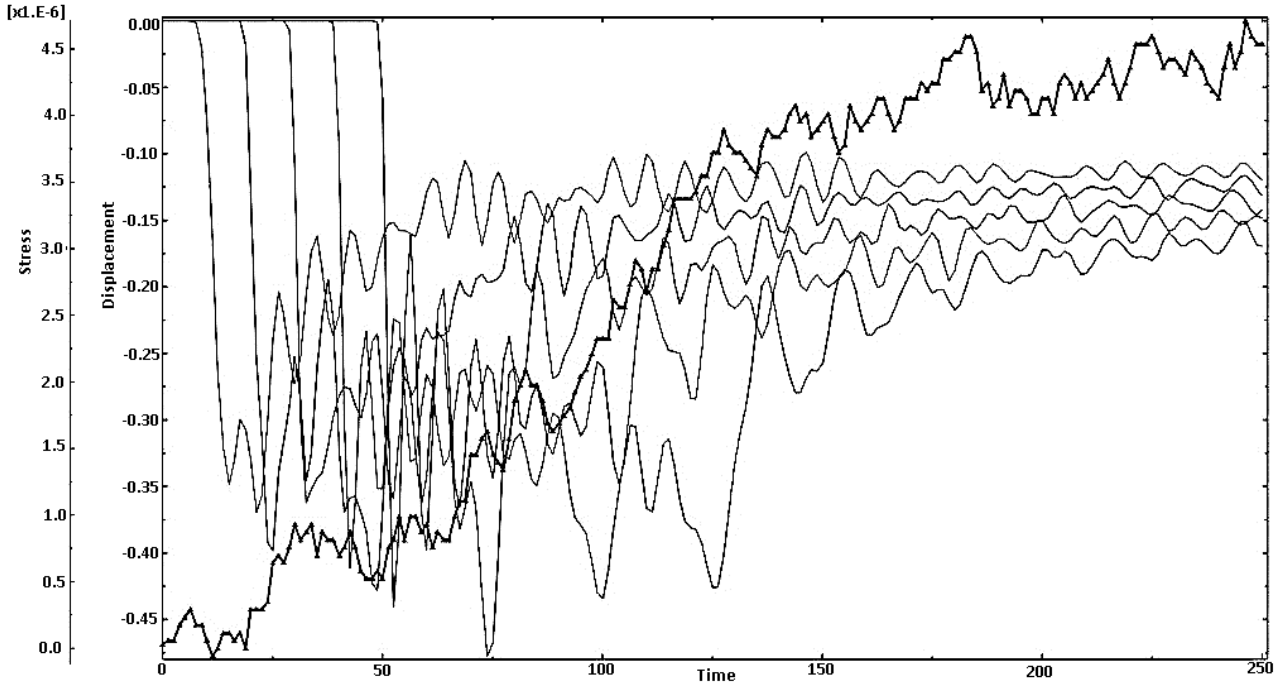


Рис. 7. Смещения элементов вдоль оси Y и напряжения. 30 м, 45 м, 60 м, 75 м

В отличие от скоростного режима, когда скорость движения штампа была меньше скорости рэлеевских волн, в трансзвуковом режиме наблюдается постепенное увеличение напряжений в центре передней грани штампа (рис. 7). Малые колебания значений напряжений свидетельствуют о постоянном фронте продольных волн, которые постоянно движутся перед штампом. Хаотичное колебание конечных элементов поверхности полупространства подтверждает, что при столь быстрой скорости движения штампа, волновые фронты образуются с разными амплитудами колебаний и скоростями распространения.

Случай скоростного резонанса

Резонансный случай задачи Лэмба известен тем, что он не поддается моделированию в программных комплексах. Несуществование решения нестационарной задачи при $C_p = v$ заключается в том, что напряжения в каждой точки данного полупространства становятся бесконечными, как и сами точки смещения полупространства. Более подробное исследование режимов перехода через рэлеевскую скорость движущейся нагрузкой и резонансных эффектов описано в [3]. Был проведен анализ проблем, возникающих при решении поставленной задачи в работах [4, 5]. Эффект резонанса при равенстве скоростей Релея и продольных волн аналогичен резонансу в колебательной системе с одной степенью свободы.

Рассмотрим задачу о движении нагрузки с постоянной скоростью подвижной нагрузки по поверхности $z = 0$.

Подставляя уравнение (1.7) в (1.2), получим уравнение движения в изотропной упругой полуплоскости:

$$C_p^2 \nabla \operatorname{div}(\vec{u}) - C_s^2 \cdot \operatorname{rot} \operatorname{rot}(\vec{u}) = \ddot{u} \quad (1.10)$$

Представим перемещения \vec{u} через векторный и скалярный потенциалы $\vec{\Phi}$ и φ :

$$\vec{u} = \nabla \varphi + \operatorname{rot} \vec{\Phi} \quad (1.11)$$

$$\begin{cases} C_p^2 \nabla \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \nabla \ddot{\varphi} \\ C_s^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{\Phi} = \operatorname{rot} \ddot{\vec{\Phi}} \end{cases} \quad (1.12)$$

$$\begin{cases} C_p^2 \nabla \Delta \varphi = \nabla \ddot{\varphi} \\ C_s^2 \operatorname{rot} \Delta \vec{\Phi} = \operatorname{rot} \ddot{\vec{\Phi}} \end{cases} \quad (1.13)$$

$$\begin{cases} C_p^2 \Delta \varphi = \ddot{\varphi} \\ C_s^2 \Delta \vec{\Phi} = \ddot{\vec{\Phi}} \end{cases} \quad (1.14)$$

Данная система (1.14) уравнений напоминает уравнения малых свободных колебаний мембраны и будет корректно далее использовать уравнение мембранного типа на поверхности $z = 0$:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{1}{C_R^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{1+k^2}{2\mu B} \cdot P_0 \delta(x - C_R t) \delta(y) \quad (1.15)$$

Где $B = \frac{k_1}{k_2} (1 - k_2^2) + \frac{k_2}{k_1} (1 - k_1^2) - 1 + k_2^4$ - упругая постоянная.

Решение уравнения (1.15) можно найти в [6]. Авторы, используя решения задачи вида Дирихле, находят компоненты перемещений. Особенно интересно вертикальное перемещение вглубь полупространства:

$$u_z = \frac{\partial \varphi(t, x, y, k_1 z)}{\partial z} - \frac{1}{1+k_1^2} \frac{\partial \varphi(t, x, y, k_2 z)}{\partial z} \quad (1.16)$$

Где функция $\varphi(t, x, y, k_1 z)$ определена в (1.17), $A = \frac{C_R(1+k^2)}{4\pi\mu B}$, $\xi = x - C_R t$ и $s = t - \tau$.

$$\varphi(\xi, y, z, t) = \frac{AP_0 k_1 z}{\pi C_R} \left[\frac{g(0)}{\xi^2 + k_1^2 z^2} - \frac{g(\xi - ik_1 z)}{2ik_1 z(\xi - ik_1 z)} + \frac{g(\xi + ik_1 z)}{2ik_1 z(\xi + ik_1 z)} \right] \quad (1.17)$$

$$\text{Где } g(s) = \left. \begin{aligned} & -\pi(s + C_R t) + \sqrt{C_R^2 t^2 - y^2 - (s + C_R t)^2} \times \\ & \tan^{-1} \left[\frac{r(s + C_R t) + y^2 + s C_R t}{\left(\frac{\sqrt{C_R^2 t^2 - y^2 - (s + C_R t)^2}}{\sqrt{C_R^2 t^2 - y^2 - (r + C_R t)^2}} \right)} \right] \right|_{S_1}^{S_2} \end{aligned}$$

Выводы

Основной задачей исследования служит анализ процессов, которые происходят в области до и после прохождения груза рассматриваемой точки, исключая динамические осцилляции. Метод конечных элементов подтвердил то, что является основным инструментом для анализа данного процесса.

Ниже представлена Таблица 1, в которой можно проследить зависимость между скоростью движения штампа и колебаний в полуплоскости, а также диапазон напряжений в центре штампа. Следует учесть, что все расчеты были проведены на идеально упругой полуплоскости, следовательно, данные параметры будут изменяться с изменением физико-механических свойств среды.

Таблица 1. Зависимость между скоростью движения штампа и колебаний в полуплоскости, диапазон напряжений в центре штампа

Скоростной диапазон	Скорость движения штампа (м/с)	Максимальное колебание вглубь полуплоскости (м)	Максимальное колебание на поверхности полуплоскости (м)	Диапазон напряжений в центре штампа (Па)
Дозвуковой диапазон	0.3	2.5	0.2	
Первый сверхзвуковой диапазон	0.65	2.7	0.4	$-0.4 \times 10^{-6} \div 0.6 \times 10^{-6}$
Второй сверхзвуковой диапазон	0.85	1.1	0.1	$-0.5 \times 10^{-6} \div 0.8 \times 10^{-6}$
Третий сверхзвуковой диапазон	1.5	0.45	0.03	$-0.1 \times 10^{-6} \div 4.6 \times 10^{-6}$

Из таблицы можно сделать вывод, что самым опасным скоростным диапазоном является первый, когда проявляются наиболее ярко выраженные колебания на поверхности, которые приводят к максимальным колебаниям как на самой поверхности, так и в глубине полуплоскости. Из таблицы можно судить, что максимальные напряжения образуются в третьем сверхзвуковом диапазоне, когда скорость движения штампа в несколько раз больше скорости волн Рэлея. Но именно в этом диапазоне мы наблюдаем самые минимальные колебания на поверхности.

Литература

1. *Lamb H.* On the propagation of Tremors over the Surface of an Elastic Solid. Philosophical Transaction of the Royal Society of London, Ser. A, 1904, pp. 1-42.
2. *Терентьева Е. О.* Задача Лэмба. Строительство: наука и образование. 2013. Вып. 3. Ст. 3.
3. *Гольдштейн Р. В.* Волны Рэлея и резонансные явления в упругих телах. Прикл. математика и механика. 1965. Т. 29. No 3. С. 516–525.
4. *Kaplunov J., Prikazchikov D. A, Erbas B. and Sahin O.* On a 3D moving load problem for an elastic half space. Wave motion 2013. No 50, pp. 1229-1238.
5. *Nihal Ege, Baris Erbas and Danila A. Prikazchikov.* On the 3D Rayleigh wave field on an elastic half-space subject to tangential surface loads.
6. *Облакова Т. В., Приказчиков Д. А.* О резонансном режиме в нестационарной задаче о подвижной нагрузке для упругого полупространства. Инженерный журнал: наука и инновации, 2013, вып. 9. [Электронный ресурс]: URL: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/hidden/959.html>. (дата обращения: 02.04.2016).