

Modeling of kinematics and dynamics of flight an unmanned aerial vehicle

Shuvakin Yu.

Моделирование кинематики и динамики полета беспилотного летательного аппарата

Шувакин Ю. А.

Шувакин Юрий Андреевич / Shuvakin Yuriy – бакалавр,
кафедра информатики и программного обеспечения вычислительных систем,
факультет микроприборов и технической кибернетики,

Национальный исследовательский университет «Московский институт электронной техники», г. Москва

Аннотация: в статье затрагивается тема моделирования кинематики и динамики беспилотного летательного аппарата (БПЛА). Это связано с тем, что в настоящее время БПЛА набирают популярность как в военной, так и в гражданской сфере, потому что они позволяют выполнять различные воздушные операции с минимальным количеством человеческих усилий. Понимание кинематики и динамики полета позволит минимизировать затраты для проектирования БПЛА.

Abstract: the paper touches upon the topic of modeling of kinematics and dynamics an unmanned aerial vehicle (UAV). This is due to the fact that currently UAVs are becoming increasingly popular in both the military and the civilian sphere, because they allow to perform various air operations with a minimum of human effort. Understanding the kinematics and dynamics of flight will minimize the costs for the design of the UAV.

Ключевые слова: беспилотный летательный аппарат (БПЛА), кинематика, динамика, моделирование.
Keywords: unmanned aerial vehicle (UAV), kinematics, dynamics, modeling.

При моделировании движения беспилотных летательных аппаратов нужно знать, каким образом различные тела ориентированы относительно друг друга. Мы должны быть в курсе того, как летательный аппарат ориентирован по отношению к земле. Также, возможно, нам интересно, как камера расположена по отношению к воздушному судну или как антенна ориентирована относительно источника сигнала на земле. В этой работе будут использоваться две системы координат: инерциальная система \mathcal{F}^i и система \mathcal{F}^b , связанная с телом БПЛА [1].

Инерциальная система отсчета \mathcal{F}^i жестко связана с точкой на поверхности Земли. Единичный вектор i^i направлен на север, j^i – на восток, k^i – к центру Земли.

Система отсчета \mathcal{F}^b связана с центром масс БПЛА. Единичный вектор i^b указывает на переднюю часть летательного аппарата, j^b – на правое крыло, k^b – на нижнюю часть.

Одна система координат преобразуется в другую с помощью двух основных операций: поворот вокруг начала координат и параллельный перенос.

Для разработки уравнений движения БПЛА введем 12 переменных состояния [2]. Среди них шесть состояний позиции и скорости связаны с поступательным движением БПЛА. Остальные описывают вращательное движение. Переменные состояния перечислены в таблице 1.

Таблица 1. Переменные состояния БПЛА

Переменная	Описание
p_n	Северная позиция БПЛА в системе отсчета \mathcal{F}^i
p_e	Восточная позиция в системе \mathcal{F}^i
p_d	Инвертированная высота в системе \mathcal{F}^i
u	Скорость относительно i в системе \mathcal{F}^b
v	Скорость относительно j в системе \mathcal{F}^b
w	Скорость относительно k в системе \mathcal{F}^b
φ	Угол крена БПЛА
θ	Угол тангажа
ψ	Угол рыскания
p	Угловая скорость крена
q	Угловая скорость тангажа
r	Угловая скорость рыскания

Поступательная скорость БПЛА выражается через компоненты скорости вдоль каждой из осей в системе координат \mathcal{F}^b . Компоненты u, v, w , (рис. 1) направлены вдоль i^b, j^b, k^b соответственно.

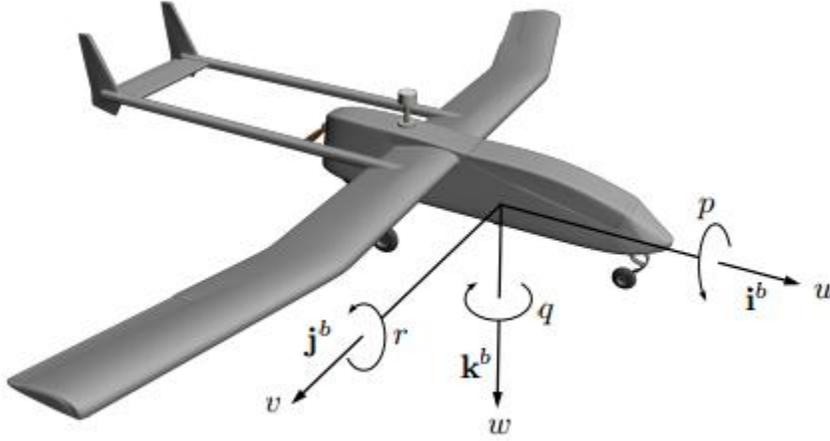


Рис. 1. Компоненты скорости БПЛА

С другой стороны, поступательное положение измеряется и выражается в инерциальной системе отсчета \mathcal{F}^i . Связующая поступательной скорости и положения требует дифференцирования и поворота вокруг начала координат:

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_n \\ \dot{p}_e \\ \dot{p}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi * \cos\theta & \cos\psi * \sin\theta * \sin\phi + & \cos\psi * \sin\theta * \sin\phi + \\ & -\cos\phi * \cos\psi & +\sin\phi * \cos\psi \\ \sin\psi * \cos\theta & \sin\psi * \sin\theta * \sin\phi + & \sin\psi * \sin\theta * \cos\phi + \\ & -\sin\phi * \cos\psi & -\sin\phi * \cos\psi \\ -\sin\theta & \sin\phi * \cos\theta & \cos\phi * \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (1)$$

Угловые скорости БПЛА могут быть выражены в терминах производных углов Эйлера [4], при условии, что соответствующие вращательные преобразования выполняются следующим образом:

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin\phi * \tan\theta & \cos\phi * \tan\theta \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi * \sec\theta & \cos\phi * \sec\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \quad (2)$$

Эти уравнения, описывающие поступательную и вращательную компоненты кинематики, являются частью конечного набора из 12 уравнений движения для БПЛА.

Чтобы получить уравнения динамики, мы будем применять второй закон Ньютона сначала к поступательным степеням свободы, а затем к вращательным. Законы Ньютона рассчитываются в инерциальных системах отсчета, а это означает, что движение тела должно быть привязано к фиксированной системе отсчета, которой в нашем случае является Земля.

С помощью второго закона Ньютона поступательное движение может быть выражено:

$$m \frac{dV}{dt} = F \quad (3)$$

где m – масса БПЛА, $\frac{dV}{dt}$ – производная по времени в инерциальной системе отсчета, F – сумма всех внешних сил, действующих на летательный аппарат. Они включают в себя гравитацию, аэродинамические силы и двигательные силы.

В случае маневрирования самолета, мы можем легко применить второй закон Ньютона, для представления силы и скорости в системе отсчета \mathcal{F}^b :

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rv - qw \\ pw - ru \\ qu - pv \end{bmatrix} + \frac{1}{m} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} \quad (4)$$

Для вращательного движения второй закон Ньютона гласит, что:

$$\frac{dh}{dt} = \mathcal{M} \quad (5)$$

где h – кинетический момент в векторной форме и \mathcal{M} – сумма всех приложенных извне моментов. Это выражение справедливо при условии, что моменты суммируются относительно центра масс БПЛА.

Для твердого тела, угловой момент определяется как произведение матрицы инерции J и вектора угловой скорости. Матрица инерции представлена в виде:

$$J = \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{bmatrix} \quad (6)$$

Диагональные члены J называются моментами инерции, в то время как недиагональные члены называются продуктами инерции. Моменты инерции являются мерами тенденции самолета противостоять ускорению вокруг определенной оси вращения [3]. Для самолетов, симметричных относительно носовой части $J_{xy} = J_{yz} = 0$.

Определив компоненты внешних моментов в виде вектора $\mathcal{M} = (l, m, n)$, мы можем выразить угловые скорости через угловые моменты:

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_1 pq - \Gamma_2 qr + \Gamma_3 l + \Gamma_4 n \\ \Gamma_5 pr - \Gamma_6 (p^2 - r^2) + \frac{1}{J_y} m \\ \Gamma_7 pq - \Gamma_1 qr + \Gamma_4 l + \Gamma_8 n \end{bmatrix} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \Gamma &= J_x J_z - J_{xz}^2 \\ \Gamma_1 &= \frac{J_{xz}(J_x - J_y + J_z)}{\Gamma} \\ \Gamma_2 &= \frac{J_z(J_z - J_y) + J_{xz}^2}{\Gamma} \\ \Gamma_3 &= \frac{J_z}{\Gamma} \\ \Gamma_4 &= \frac{J_{xz}}{\Gamma} \\ \Gamma_5 &= \frac{J_z - J_x}{J_y} \\ \Gamma_6 &= \frac{J_{xz}}{J_y} \\ \Gamma_7 &= \frac{(J_x - J_y)J_x + J_{xz}^2}{\Gamma} \\ \Gamma_8 &= \frac{J_x}{\Gamma} \end{aligned} \quad (8)$$

Таким образом, уравнения (1), (2), (4), (7) представляют собой 6DoF (шесть степеней свободы) модель БПЛА – возможность летательного аппарата совершать геометрические движения в трёхмерном пространстве, а именно: двигаться вперёд или назад, вверх или вниз, влево или вправо, включая повороты вокруг каждой из трёх взаимно перпендикулярных осей.

Литература

1. *Beard R. W., McLain T. W.* (2012). "Small Unmanned Aircraft: Theory and Practice", Princeton University Press.
2. *Hostmark J. B.* (2007). "Modeling Simulation and Control of Fixed-wing UAV: CyberSwan", Master of Science Thesis, Norwegian University of Science and Technology (NTNU), Trondheim, Norway.
3. *Sobolic F.* "Agile flight control techniques for a fixed-wing aircraft", Master's thesis, Massachusetts Institute of Technology, 2009.
4. *Phillips W. F., Hailey C. E. and Gebert G. A.* "Review of attitude representations used for aircraft kinematics", in *Journal of Aircraft*, vol. 38. №. 4, 2001.