Creation of the finite-dimensional regularizing operator for the solution of the operator equation of the first sort

Saadabayev A.[1], Abdyldayeva A.[2]

Построение конечномерного регуляризующего оператора для решения операторного уравнения первого рода

Саадабаев А.[1], Абдылдаева А. Р.[2]

*[1]Саадабаев Аскербек / Saadabayev Askerbek – доктор физико-математических наук, профессор,
кафедра дифференциальных уравнений,
Кыргызский национальный университет им. Ж. Баласагына;
[2]Абдылдаева Асель Рыскулбековна / Abdyldayeva Asel – старший преподаватель,
кафедра прикладной математики и информатики,
Кыргызский государственный технический университет им. И. Раззакова,
г. Бишкек, Кыргызская Республика*

Аннотация: *в данной работе рассмотрено операторное уравнение первого рода. для решения операторного уравнения построен конечномерный регуляризующий оператор в Гильбертовом пространстве.*

Abstract: *in this paper, we consider the operator equation of the first kind. To solve the operator equation constructed finite regularizing operators in Hilbert space.*

Ключевые слова: *вполне непрерывный оператор, собственные значения, собственные элементы, некорректные задачи.*

Keywords: *completely continuous operator, eigenvalues, own elements, ill-posed problems.*

Рассмотрим операторное уравнение первого рода

$$Az = u, \qquad (1)$$

где A - линейный положительный самосопряженный вполне непрерывный оператор, действующий из гильбертова пространства H в H.

Будем предполагать, что при $u = u_0$ уравнение (1) имеет единственное решение z_0, истокообразно представимое с помощью оператора $B = A^{\theta}, 0 < \theta < 1$, т.е. $z_0 = B\vartheta_0$, где $\vartheta_0 \in H$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Элемент u называется p - истокообразно представимым, если сходится числовой ряд

$$\sum \lambda_i^p u_i^2,$$

где u_i - коэффициенты Фурье элемента u по системе φ_i, λ_i - характеристические числа оператора A.

Известно [1], что собственные элементы $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$ оператора A образуют ортонормированный базис в пространстве H. Пусть H_n - конечномерное пространство, порожденное элементами $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$.

Рассмотрим в пространстве H_n следующий функционал [2]

$$M_n^{\alpha}[\vec{a}, u] = \alpha \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i \right\|^2 + \left\| AB\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i \right) - u \right\|^2. \qquad (2)$$

Используя представление

$$A^{\theta} z = \sum_{i=1}^{n} \frac{z_i \varphi_i}{\lambda_i^{\theta}},$$

этот функционал перепишем в виде

$$M_{\alpha}^{n}[a_1, \dots, a_n, u] = \alpha \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\varphi_i}{\lambda_i^{1+\theta}} - u \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i^{1+\theta} \varphi_i - u \right) =$$

$$= \alpha \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \left(a_i \lambda_i^{1+\theta} \right)^2 - 2 \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i^{1+\theta} u_i + \|u\|^2.$$

Уравнение Эйлера для этого функционала имеет вид

$$\alpha \cdot a_i + \frac{a_i}{\lambda_i^{1+\theta}} - \frac{u_i}{\lambda_i^{1+\theta}} = 0.$$

Отсюда

$$a_i = \frac{u_i}{\alpha \lambda_i^{1+\theta} + 1}.$$

Через $\vec{a}_{\alpha}^{0}$ обозначим вектор, минимизирующий функционал (2) при $u = u_0$. Элемент, соответствующий этому вектору, обозначим через

$$\vartheta_{n,\alpha}^0 = \sum_{i=1}^{n} a_{i,\alpha}^0 \varphi_i.$$

Пусть P_n – ортогональный проектор пространства H в H_n. Обозначим через ϑ_n^0 проекцию элемента ϑ_0, т.е.

$$\vartheta_n^0 = P_n \vartheta_0 = \sum_{i=1}^{n} a_i^0 \varphi_i.$$

Покажем, что при определенной зависимости параметра α от номера n аппроксимации элемент $A^\theta \vartheta_{n,\alpha}^k$ сходится к точному решению уравнения (1).

Так как элемент $\vartheta_{n,\alpha}^k$ соответствует вектору $\vec{a}_\alpha^0$, минимизирующему функционал (2) при $u = u_0$, то справедливо неравенство

$$\alpha \left\|\vartheta_{n,\alpha}^0\right\|^2 + \left\|AB\vartheta_{n,\alpha}^0 - u_0\right\|^2 \le \alpha \|\vartheta_n^0\|^2 + \|AB\vartheta_n^0 - u_0\|^2. \qquad (3)$$

Оценим второе слагаемое справа в неравенстве (3)

$$\left\|AB\vartheta_{n,0} - u_0\right\| = \|ABP_n\vartheta_0 - AB\vartheta_0\| = \|AB(P_n - E)\vartheta_0\| \le\le \|A\| \cdot \|B(P_n - E)\| \cdot \|\vartheta_0\| \qquad (4)$$

Рассмотрим величину

$$\beta(n) = \|B(P_n - E)\| = \sup_{\|\vartheta\| \le 1} \left\|A^\theta (P_n - E)\vartheta\right\|.$$

Имеем

$$P_n\vartheta - \vartheta = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i - \sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_i = -\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i \varphi_i.$$

Далее

$$A^\theta \left(-\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i \varphi_i\right) = -\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{a_i \varphi_i}{\lambda_i^\theta}.$$

Тогда

$$\left\|A^\theta (P_n - E)\vartheta\right\|^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i\, \lambda_i^{2\theta}.$$

Учитывая [3], что для собственных значений оператора A выполняется условие $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \ldots \to \infty$, получим

$$\sup_{\|\vartheta\| \le 1} \left\|A^\theta (P_n - E)\vartheta\right\|^2 \le \frac{1}{\lambda_{n+1}^{2\theta}} \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i^2 \le \frac{1}{\lambda_{n+1}^{2\theta}}.$$

Тогда $\beta(n) \to 0$ при $n \to \infty$.

Доказана следующая

ЛЕММА. Пусть: 1) A - линейный вполне непрерывный положительный самосопряженный оператор из гильбертова пространства H в H; 2) при $u = u_0$ уравнение (1) имеет единственное решение, представимое в виде $z_0 = A^\theta \vartheta_0, \vartheta_0 \in H$. Тогда справедлива оценка

$$\beta(n) = \|B(P_n - E)\| \le \frac{1}{\lambda_{n+1}^{2\theta}}, \qquad 0 < \theta < 1,$$

где λ_{n+1} - характеристическое значение оператора A.

Используя эту лемму, из неравенства (4) получим

$$\|AB\vartheta_n^0 - u_0\| \le \|A\| \cdot \|\vartheta_0\| \cdot \frac{1}{\lambda_{n+1}^\theta}.$$

Тогда из неравенства (3) имеем

$$\alpha \left\|\vartheta_{n,\alpha}^0\right\|^2 \le \alpha \|\vartheta_n^0\|^2 + K_0 \lambda_{n+1}^{2\theta}, \qquad (5)$$

$$\left\|AB\vartheta_{n,\alpha}^0 - u_0\right\|^2 \le \alpha \|\vartheta_n^0\|^2 + K_0^2 \lambda_{n+1}^{2\theta}, \qquad (6)$$

где $K_0 = \|A\| \cdot \|\vartheta_0\|$. Отсюда получим

$$\left\|\vartheta_{n,\alpha}^0\right\|^2 \le \|\vartheta_n^0\|^2 + K_0^2 \alpha^{-1} \lambda_{n+1}^{2\theta} \le \|P_n \vartheta_0\|^2 + K_0^2 \alpha^{-1} \frac{1}{\lambda_{n+1}^{2\theta}}.$$

В силу теоремы Банаха – Штейнгауза [1] имеем $\|P_n\| \le K_1$ для любого $n \in N$. Учитывая это, получим

$$\left\|\vartheta_{n,\alpha}^0\right\|^2 \le K_1^2 \|\vartheta_0\|^2 + K_0^2 \gamma_1,$$

т.е. семейство $\{\vartheta_{n,\alpha}^0\}$ является ограниченным.

Тогда семейство $\{B\vartheta_{n,\alpha}^0\}$ является компактным, т.е. существует подпоследовательность $\{\vartheta_{n_k,\alpha_k}^0\}$ такая, что $B\vartheta_{n_k,\alpha_k}^0 \to z^*$.

Пусть параметр α удовлетворяет неравенству $\alpha(n) \le \gamma_2 \frac{1}{\lambda_{n+1}^{2\theta}}$. Переходя к пределу при $n \to \infty$ в неравенстве (5), получим $\|Az^* - u_0\| \le 0$, т.е. $Az^* = u_0$. В силу единственности решения уравнения (1) получим $z^* = z_0$.

Доказана следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть: 1) выполняются все условия леммы; 2) параметр α удовлетворяет неравенству $\gamma_1^{-1}\lambda_{n+1}^{2\theta} \le \alpha(n) \le \gamma_2\lambda_{n+1}^{2\theta}$, где $\gamma_1^{-1} < \gamma_2$ – положительные постоянные. Тогда элемент $z_{n,\alpha}^0 = B\vartheta_{n,\alpha(n)}^0$ при $n \to \infty$ сходится к точному решению уравнения (1) по норме пространства H.

Пусть вместо элемента u_0 задан элемент u_δ, удовлетворяющий неравенству $\|u_0 - u_\delta\| \le \delta$. Рассмотрим функционал (2) при $u = u_\delta$. Вектор, минимизирующий этот функционал, обозначим через $\vec{a}_\alpha^\delta$. Этому вектору соответствует элемент

$$\vartheta_{n,\alpha}^\delta = \sum_{i=1}^{n} a_{i,\alpha}^\delta \varphi_i.$$

В силу свойства точной нижней границы справедливо неравенство

$$\alpha\left\|\vartheta_{n,\alpha}^\delta\right\|^2 + \left\|AB\vartheta_{n,\alpha}^\delta - u_\delta\right\|^2 \le \alpha\|P_n\vartheta_0\|^2 + \|ABP_n\vartheta_0 - u_\delta\|^2. \qquad (7)$$

Второе слагаемое справа в этом неравенстве оценим следующим образом

$$\|ABP_n\vartheta_0 - u_\delta\| \le \|ABP_n\vartheta_0 - u_0\| + \|u_0 - u_\delta\| \le \beta(n)K_0 + \delta, \qquad (8)$$

где $\beta(n) = \frac{1}{\lambda_{n+1}^{\theta}}$. Из неравенства (7) получим

$$\left\|\vartheta_{n,\alpha}^\delta\right\|^2 \le K_1^2\|\vartheta_0\|^2 + \frac{1}{\alpha}(\beta(n)K_0 + \delta)^2$$

или

$$\left\|\vartheta_{n,\alpha}^\delta\right\| \le \left(K_1^2\|\vartheta_0\|^2 + \frac{1}{\alpha}(\beta(n)K_0 + \delta)^2\right)^{1/2}.$$

В силу теоремы 1 имеем

$$\frac{\beta(n)}{\sqrt{\alpha}} \le \gamma_1, \;\; т.е. \;\; \alpha(n) \ge \gamma_1^{-2}\frac{1}{\lambda_{n+1}^{2\theta}}.$$

Отсюда получим

$$\frac{\delta}{\sqrt{\alpha}} \le \delta\gamma_1\beta^{-1}(n) \le \overline{\gamma_1}\,, т.е. \;\; \beta^{-1}(n) \le \overline{\gamma_1}\gamma_1^{-1}\delta^{-1}.$$

При выполнении этих условий получим

$$\left\|\vartheta_{n,\alpha}^\delta\right\| \le \left(K_1^2\|\vartheta_0\|^2 + (\gamma_1K_0 + \overline{\gamma_1})^2\right)^{1/2},$$

т.е. семейство $\left\{\vartheta_{n,\alpha}^\delta\right\}$ является ограниченным. Используя неравенство (8), из неравенства (7) получим

$$\left\|AB\vartheta_{n,\alpha}^\delta - u_\delta\right\|^2 \le \alpha K_1^2\|\vartheta_0\|^2 + (\beta(n)K_0 + \delta)^2.$$

Отсюда

$$\left\|AB\vartheta_{n,\alpha}^\delta - u_\delta\right\|^2 \le \alpha K_1^2\|\vartheta_0\|^2 + \left(\beta(n)K_0 + \overline{\gamma_1}\sqrt{\gamma_2}\lambda_{n+1}^{\theta}\right)^2 \le$$
$$\le \square_2\square^{2\square}_{\square+1}\|\square_0\|^2 + \left(\square(\square)\square_0 + \overline{\square_1}\sqrt{\square_2}\square^{\square}_{\square+1}\right)^2.$$

Из этого неравенства получим

$$\left\|\square\square\square^{\square}_{\square,\square} - \square_{\square}\right\| \le \left\{\square_2\frac{1}{\square^{2\square}_{\square+1}}\|\square_0\|^2 + \left(\square(\square)\square_0 + \overline{\square_1}\sqrt{\square_2}\frac{1}{\square^{\square}_{\square+1}}\right)^2\right\}^{1/2}.$$

Используя это неравенство и неравенство треугольника, получим следующее неравенство

$$\left\|\square\square\square^{\square}_{\square,\square} - \square_0\right\| \le \left\|\square\square\square^{\square}_{\square,\square} - \square_{\square}\right\| + \|\square_{\square} - \square_0\| \le$$
$$\le \left\{\square_2\frac{1}{\square^{2\square}_{\square+1}}\|\square_0\|^2 + \left(\square(\square)\square_0 + \overline{\square_1}\sqrt{\square_2}\frac{1}{\square^{\square}_{\square+1}}\right)^2\right\}^{1/2} + \square.$$

Пусть существует постоянная $\overline{\square_2}$ такая, что $\square \le \overline{\square_2}\frac{1}{\square^{\square}_{\square+1}}$. Тогда, переходя к пределу при $\square \to \infty$ в последнем неравенстве, получим

$$\|\square\square^* - \square_0\| \le 0.$$

Учитывая, что норма элемента неотрицательное число, получим $\square\square^* = \square_0$. В силу единственности решения уравнения (1) при $\square = \square_0$ получим $\square^* = \square_0$.

Доказана следующая

ТЕОРЕМА 2. Пусть: 1) выполняются условия теоремы 1; 2) номер аппроксимации $\square$ удовлетворяет неравенству

$$\square\square_{1}\overline{\square}_{1}^{-1} \leq \frac{1}{\square^{\square}_{\square+1}} \leq \square\overline{\square}_{2}^{-1}.$$

Тогда элемент $\square\square^{\square}_{\square,\square}$ при $\square \to 0$ сходится к точному решению уравнению (1) по норме пространства $\square$.

Таким образом, показали, что данный метод конечномерной аппроксимации является устойчивым относительно правой части исходного уравнения.

Литература

1. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965. 513 стр.
2. *Саадабаев А.* Конечномерная аппроксимация решения операторного уравнения первого рода// Исслед. по интегро-дифференциальным уравнениям. Бишкек: Илим, 1991. Вып. 23. стр. 152-155.
3. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа; Учебник для мат. спец. ун-тов. 4-е изд., перераб. М.: Наука, 1976. 543 стр.