Calculation of auxiliary functions in the theory of wave diffraction on planar structures
Duisengali G. (Republic of Kazakhstan)
Расчет вспомогательных функций в теории дифракции волн на плоских структурах
Дуйсенгали Г. Б. (Республика Казахстан)

Дуйсенгали Гулбакыт Бахтыгаликызы / Duisengali Gulbakyt – магистрант,
кафедра радиотехники, электроники и телекоммуникаций,
Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилева, г. Астана, Казахстан

Аннотация: *в данной работе решена задача о дифракции на щели методом Винера-Хопфа и получены численные результаты. Краевая задача с помощью граничных условий сводится к решению системы сингулярных интегральных уравнений, далее парных интегральных уравнений Вайнштейна и, наконец, системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода.*
Abstract: *in this paper, we solve the problem of diffraction by a slit by the Wiener-Hopf and obtained numerical results. A boundary value problem with the help of boundary conditions, is reduced to a system of singular integral equations, then the pair of integral equations Weinstein and, finally, the system of Fredholm integral equations of the second kind.*

Ключевые слова: *дифракция, вспомогательная функция, плоская волна.*
Keywords: *diffraction, auxiliary function, a plane wave.*

Решение класса задач дифракции электромагнитных волн на плоских конечных структурах является актуальным, поскольку они широко применяются в элементах квазиоптических трактов, например, в качестве диафрагменной линии, системы дифракционно-связанных открытых резонаторов [1]. Одним из ключевых задач теории дифракции является дифракция на щели. Строгое решение данной задачи рассмотрено в работах Вайнштейна, Кибуртца, Штоккеля, Миллара, Вестфаля и Люнебурга. Также эта задача была решена методом Римана Гильберта в работах Шестопалова С. В [2]. Однако у всех вышеперечисленных работах возникают проблемы при решении задачи в случаях, когда длина волны соизмеримы с длиной щели и т. д.

В работе [3] ключевая задача о дифракции волны на щели решена методом Винера-Хопфа. Но для расчета полученных выражений с заданной точностью необходимо найти оптимальные алгоритмы расчета новых специальных функций.

Цель: Вычисление специальных функции для решения дифракционных задач.

Постановка задачи

Рассмотрим задачи о дифракции на щели. Решением данной краевой задачи является [4]:

$$F(w) = F_1(w) + F_2(w), \tag{1}$$

где:

$$F_2(w) = \sqrt{k+w}\left(A_2(w) + B^+(w)\right)\exp(iwa), \tag{2}$$

$$F_1(w) = \sqrt{k-w}\left(A_1(w) + B^-(w)\right)\exp(-iwa), \tag{3}$$

$$B^-(w) = -\frac{A_o}{2\pi i}\frac{\sqrt{k+h}}{w-h}\exp(-iha)\left(\mathrm{I}(w) - \mathrm{I}(h)\right) + B^+(\kappa)\mathrm{I}(w), \tag{4}$$

$$B^+(w) = \frac{A_o}{2\pi i}\frac{\sqrt{k+h}}{w-h}\exp(iha)\left(\mathrm{I}(-w) - \mathrm{I}(-h)\right) + B^-(-\kappa)\mathrm{I}(-w) \tag{5}$$

В этих функциях искомые $B^+(w)$ и $B^-(w)$ находятся посредством эталонного интеграла. Для определения асимптотических решений полученной системы интегральных уравнений и основного вклада интегралов необходимо рассмотреть следующий эталонный интеграл:

$$I(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C^+}\frac{\exp(i2aw_o)}{w_o - w}\sqrt{\frac{k-w_o}{k+w_o}}\,dw_o, \tag{6}$$

Этот эталонный интеграл сводится

$$I(w) = -\frac{1}{2i}\mathrm{H}_0^{(1)}(2ka) - \sqrt{\frac{k+w}{k-w}}\exp(i2aw)\Gamma(ka, w/k) \tag{7}$$

Специальную функцию $\Gamma(ka,\cos\beta)$ можно представить как

$$\Gamma(ka, w/k) = \sin\beta\int_{\infty}^{ka}\mathrm{H}_0^{(1)}(2t)\exp(-2it\cos\beta)dt\,,\ \cos\beta = w/k \tag{7}$$

Отметим полезные свойства, которые следуют из вышеприведенных формул:
$\Gamma(ka,\cos\beta) = \Gamma(ka,\cos(\beta \pm 2\pi))$, $\Gamma(ka,1) = -1$, $\Gamma(ka,-1) = 0$.
Ниже приведены графики специальных функций, а также их асимптотики.

$$X(S,x) := \frac{e^{\frac{-i\cdot\pi}{4}}}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot\int_0^{2\cdot\sqrt{k\cdot S}\cdot\sin\left(\frac{x}{2}\right)} e^{\frac{i\cdot t^2}{2}}\,dt - \frac{\mathrm{signum}\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right),0\right)}{2}$$

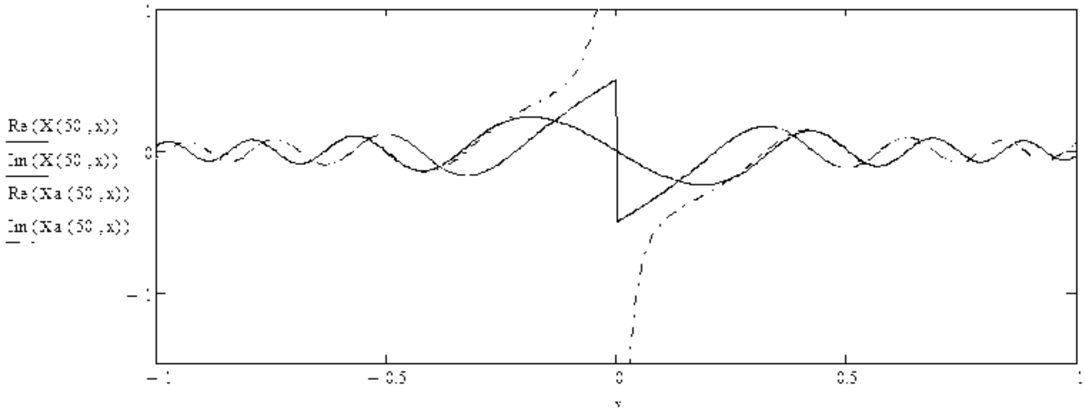

График- 1. График и асимптотика специальной функции X (S,x)

График 1

$$\Gamma a(x) := -1 + \frac{\mathrm{acos}(x)}{\pi} + \sqrt{1-x^2}\cdot\int_0^{k\cdot a} \mathrm{H1}(0,2t)\cdot e^{-2\cdot t\cdot i\cdot x}\,dt$$

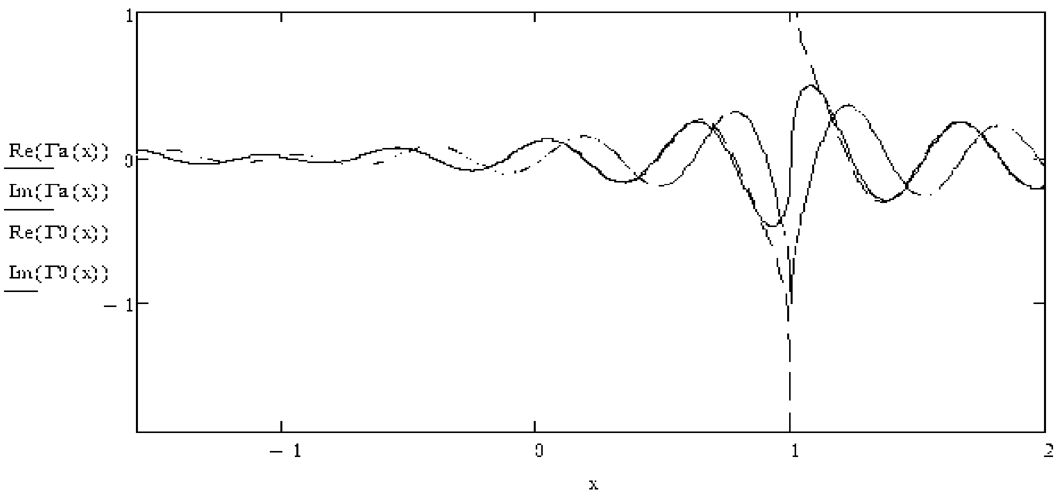

График- 2. График и асимптотика специальной функции Γa(x)

График 2

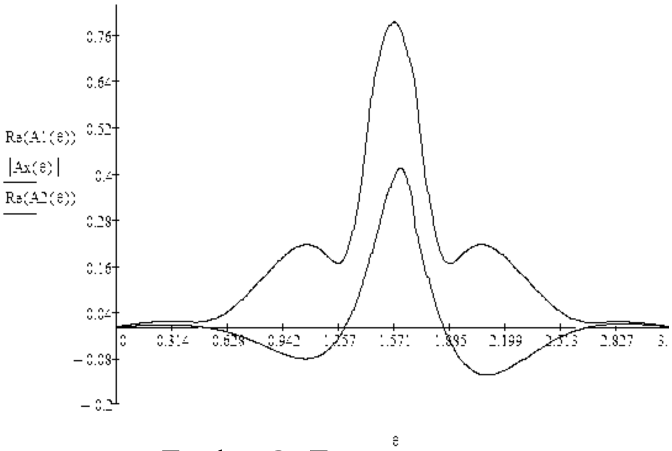

График 3- Диаграмма направленности излучения

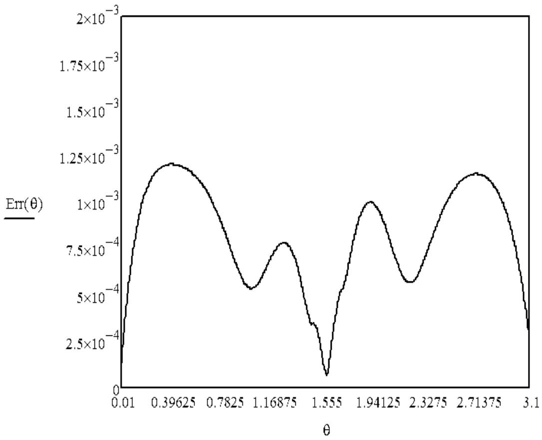

График 4- Погрешность вычисления

График 3

Заключение

Решена задача о дифракции на щели методом ВХФ с помощью специальных функций, и получены численные результаты. Благодаря специальным функциям, получены численные результаты в задачах о дифракции, когда длина волны соизмерима с длиной щели.

Результаты отличаются простотой в использовании, а также обладают высокой точностью.

Литература

1. *Вайнштейн J. А.* Дифракция электромагнитных волн на решетке из параллельных проводящих полос // ЖТФ. 1955. - Т. 25, № 5. - С. 856-862.
2. *Хаскинд М. Д., Вайнштейн Л. А.* Дифракция плоских волн на щели и ленте. Радиотехника и электроника, 1964, т. 9, № 10, с. 1821-1833.
3. *Агранович З. С.,Марченко В. А., Шестопалов В. П.* Дифракция электромагнитных волн на плоских металлических решетках // ЖТФ. - 1962. Т. 32, № 4. - С. 381-384.
4. *Алексеева JI. А., Саутбеков С. С.* Метод обобщенных функций при решении стационарных краевых задач для уравнений Максвелла // Журнал вычислительной математики и математической физики - 2000. Т. 40, № 4. - С. 611-622.
5. *Саутбеков С. С.* Factorization method for finite fine structure // Progress In Electromagnetics Research B, Vol. 25, 1 {21, 2010.