Using the method of the additional argument for nonlinear partial integro-differential equations of the second order with many variables
Mamaziaeva E. (Republic of Kyrgyzstan)

Применение метода дополнительного аргумента для нелинейного интегро-дифференциального уравнения в частных производных второго порядка со многими переменными
Мамазиаева Э. А. (Кыргызская Республика)

Мамазиаева Эльмира Амановна / Mamaziaeva Elmira - старший преподаватель,
кафедра прикладной математики,
Ошский технологический университет им. Адышева, г. Ош, Кыргызская Республика

Аннотация: *начальная задача для операторно-дифференциального уравнения в частных производных второго порядка новым способом сведена к решению системы интегральных уравнений.*
Abstract: *the initial value problem for nonlinear partial operator-differential equations of the second order is reduced to solving of systems of integral equation.*

Ключевые слова*: дифференциальное уравнение в частных производных, нелинейное уравнение, интегро–дифференциальное уравнение, метод дополнительного аргумента, задача Коши, принцип сжимающих отображений.*
Keywords: *partial differential equation, non-linear equation, integro-differential equation, method of additional argument, Cauchy problem, contracting mappings principle.*

Введение

Использование метода дополнительного аргумента дает возможность исследовать новые классы задач для уравнений в частных производных. Основная идея этого метода состоит в том, что исходная краевая задача путем введения дополнительной переменной сводится к системе интегральных уравнений, удобной для исследования. Отождествление переменных в решении такой системы дает решение исходной задачи.

Основы метода дополнительного аргумента систематически изложены в монографии М. И. Иманалиева [1].

С использованием основных идей метода дополнительного аргумента в [2, 3] были исследованы дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения в частных производных типа Кортевега - де Фриза, а также нелинейные волновые уравнения.

В работе [4] создана общая схема применения метода дополнительного аргумента для квазилинейного операторно-дифференциального уравнения в частных производных высшего порядка и показана применимость этой схемы для различных конкретных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных высших порядков, а также возможность приближенного решения задач по этой схеме.

В данной работе на основе метода дополнительного аргумента производятся исследования решения нелинейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка со многими переменными.

Постановка задачи

Рассматривается интегро-дифференциальное уравнение вида:

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = a^2(t,x)\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x_i \partial x_j} + b(t,x,u)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u(t,x)}{\partial x_i} + F(t,x;u), \quad (1)$$

$$(t,x)\in G_{n+1}(T)=[0,T]\times R^n,$$

где

$$F(t,x;u) = f(t,x,u(t,x),I(t;u(s,x):s)),$$

$$I(t;u(s,x):s) = \int_0^t K(t,s)u(s,x)ds.$$

с начальными условиями

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t=0} = u_k(x), \quad k=0,1, \quad x\in R^n. \quad (2)$$

Воспользуемся обозначениями:

$C_b^{(k)}$ - класс функций, непрерывных и ограниченных вместе со своими производными до *к*-го порядка,

Lip(N$|_u$*,M*$|_v$*, ...)* – класс функций, удовлетворяющих условию Липшица по переменной u с коэффициентом *N*, по переменной *v* с коэффициентом *M,...*;

$$D_n[\omega] = \frac{\partial}{\partial t} + \omega\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k},$$

$$\vartheta_i(t,x) = D_n[(-1)^i a(t,x)]u(t,x), \quad (3)$$

$$g_i(t,x,u) = \frac{1}{a(t,x)}[b(t,x,u) + (-1)^i D_n[(-1)^{i+1}a(t,x)]a(t,x)], \quad i=1,2,$$

$$f_i(t,x,u) = (-1)^{i+1}D_n[(-1)^{i+1}a(t,x)]g_i(t,x,u), \quad i=1,2,$$

$$r_i(t,x,u) = (-1)^{i+1}\frac{\partial g_i(t,x,u)}{\partial u}, \quad i=1,2.$$

Теорема. Пусть $u_k(x)\in C_b^{(2-k)}(R^n), k=0,1, \quad a(t,x)\in C_b^{(2)}(G_{n+1}(T)),$

$f(t,x,u,I)\in \overline{C}_b^{(2)}(G_{n+1}(T)\times R^2)\cap Lip(L\big|_u, N\big|_I),$ $K(t,s)\in C(G),$ $b(t,x,u)\in C_b^{(2)}(G_{n+1}(T)\times R)$ и вместе со своими производными удовлетворяют условию Липшица по u.

Тогда существует такое $T^*>0,$ что задача (1), (2) имеет единственное решение в $\overline{C}_b^{(2)}(G_{n+1}(T^*)).$

Доказательство

Лемма 1. Задача (1)-(2) эквивалентна системе интегральных уравнений

$$u(t,x) = u_0(p_i(0,t,x) + \int_0^t \vartheta_i(s,p_i(s.t.x))ds \quad (4)$$

$$\vartheta_i(t,x) = \frac{1}{2}\varphi_i(p_i(0,t,x)) + (-1)^{i+1}\frac{1}{2}g_i(t,x,u)u + (-1)^i\frac{1}{2}\int_0^t g_i(s,p_i,u(s,p_i))\times$$
$$\times\vartheta_i(s,p_i)ds - \frac{1}{2}\int_0^t f_{i.}(s,p_i,u(s,p_i))u(s,p_i)ds - \frac{1}{2}\int_0^t r_i(s,p_i,u(s,p_i))u(s,p_i)\times \quad (5)$$
$$\times\vartheta_j(s,p_i)ds + \int_0^t F(s,p_i;u(s,p_i))ds, \quad i,j=1,2; \quad i\neq j,$$

где

$$\left[2\vartheta_i(t,x) + (-1)^i g_i(t,x,u)u(t,x)\right]_{t=0} = \varphi_i(x) \quad i=1,2, \quad (6)$$

$p_i(s,t,x) = (p_i^1(s,t,x),..., p_i^n(s,t,x)), \quad i=1,2-$ решения соответствующих систем интегральных уравнений:

$$p_i^j(s,t,x) = x_j + (-1)^i\int_s^t a(\tau,p_i(\tau,t,x))d\tau, \quad i=1,2, \quad j=1,...,n,$$

$$(s,t,x)\in Q_2^n(T) = \{(s,t,x)\big|0\le s\le t\le T, x\in R^n\};$$

Доказательство. Пусть $u(t,x), \vartheta_i(t,x),\ i=1,2$ - решение системы интегральных уравнений (4), (5). Непосредственным дифференцированием из (4), (5) имеем:

$$D_n[(-1)^i a(t,x)]u(t,x) = \vartheta_i(t,x), \quad (7)$$

$$D_n[(-1)^{i+1} a(t,x)]\vartheta_i(t,x) = (-1)^{i+1}\frac{1}{2}g_i(t,x,u)\vartheta_j(t,x) + (-1)^i\frac{1}{2}g_i(t,x,u)\vartheta_i(t,x) +$$
$$+F(t,x;u), \quad i,j=1,2; \quad i\neq j.$$

(8)

Подставляя (7) в (8), получаем уравнению (1).

Таким образом, мы доказали, что система уравнений (4), (5) удовлетворяет уравнению (1). Система уравнений (4), (5) удовлетворяет и начальному условию (2).

Теперь покажем, что решение задачи (1)-(2) является решением системы интегральных уравнений (4), (5) т. е. решение задачи (1)-(2) сводим к решению системы интегральных уравнений (4)-(5). Для этого запишем уравнение (1) в виде

$$D_n[(-1)^{i+1}a(t,x]\big(2\vartheta_i(t,x)+(-1)^i g_i(t,x,u))u\big) = (-1)^i g_i(t,x,u)\vartheta_i(t,x) - f_i(t,x,u)u -$$
$$-r_i(t,x,u)u(t,x)\vartheta_j(t,x) + 2F(t,x;u), \quad i,j=1,2; \quad i\neq j. \quad (9)$$

Действительно из (9) имеем:

$$2D_n[(-1)^{i+1}a(t,x)]\vartheta_i(t,x) - r_i(t,x,u)\vartheta_j(t,x)u(t,x) - f_i(t,x,u)u(t,x) +$$
$$+(-1)^i g_i(t,x,u)\vartheta_j(t,x) = (-1)^i g_i(t,x,u)\vartheta_i(t,x) - f_i(t,x,u)u(t,x) -$$
$$-r_i(t,x,u)\vartheta_j(t,x)u(t,x) + 2F(t,x;u), \quad i,j=1,2; \quad i\neq j.$$

Отсюда

$$2D_n[(-1)^{i+1}a(t,x)]\vartheta_i(t,x) = (-1)^{i+1}g_i(t,x,u)\vartheta_j(t,x) + (-1)^i g_i(t,x,u)\vartheta_i(t,x) + 2F(t,x;u), \quad (10)$$

$$i,j=1,2; \quad i\neq j.$$

Для (10), принимая во внимание обозначения (3), получаем:

$$2\left[\frac{\partial^2 u(t.x)}{\partial t^2} - a^2(t.x)\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x_i \partial x_j} + (-1)^i\sum_{i=1}^n \frac{\partial u(t,x)}{\partial x_i}D_n[(-1)^{i+1}a(t,x)]a(t,x)\right] =$$
$$=(-1)^{i+1}g_i(t,x,u)D_n[(-1)^{i+1}a(t,x)]u(t,x) + (-1)^i g_i(t,x,u)\times$$
$$\times D_n[(-1)^i a(t,x)]u(t,x) + 2F(t,x;u), \quad i=1,2.$$

Отсюда

$$2\left[\frac{\partial^2 u(t.x)}{\partial t^2} - a^2(t.x)\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x_i \partial x_j} + (-1)^i\sum_{i=1}^n \frac{\partial u(t,x)}{\partial x_i}D_n[(-1)^{i+1}a(t,x)]a(t,x)\right] =$$
$$=2\big(b(t,x,u) + (-1)^i D_n[(-1)^{i+1}a(t,x)]a(t,x)\big)\sum_{i=1}^n \frac{\partial u(t,x)}{\partial x_i} + 2F(t,x;u),$$

$$i=1,2.$$

Таким образом, мы показали, что из (9) получается уравнение (1).

Введем обозначение $z(t,x;u) = 2\vartheta_i(t,x) + (-1)^i g_i(t,x,u))u.$

Уравнение (9) с условиями (2) с помощью метода дополнительного аргумента сводится к решению интегро-дифференциального уравнения

$$z(t,x,;u)=\varphi_i(p_i(0,t,x))+(-1)^i\int_0^t g_i(s,p_i,u(s,p_i))\vartheta_i(s,p_i)ds-$$

$$-\int_0^t f_{i.}(s,p_i,u(s,p_i))u(s,p_i)ds-\int_0^t r_i(s,p_i,u(s,p_i))u(s,p_i)\vartheta_j(s,p_i)ds+ \quad (11)$$

$$+2\int_0^t F(s,p_i;u(s,p_i))ds, \quad i,j=1,2; \quad i\neq j.$$

В самом деле, дифференцируя (11), получаем (9). Полагая $t=0$ в (11), получаем (6). Из (11) следует (5).

Из обозначения (3) методом дополнительного получаем (4).

Лемма доказана.

Лемма 2. Существует такое $T^*>0,$ что система интегральных уравнений (4), (5) имеет единственное решение.

Доказательство.

Запишем систему интегральных уравнений (4)-(5) в виде:

$$\theta=A\theta, \quad (12)$$

где $\theta=(\theta_1,\theta_2,\theta_3)$ - вектор-функция переменных (t,x), $\theta_1=u(t,x)$, $\theta_2=\vartheta_1(t,x), \quad \theta_3=\vartheta_2(t,x)$,

$A=(A_1,A_2,A_3)$ определяются равенствами:

$$A_1\theta=u_0(p_i(0,t,x)+\int_0^t\theta_i(s,p_i(s.t.x))ds, \quad i=1,2 \quad (13)$$

$$A_i\theta=\frac{1}{2}\varphi_i(p_i(0,t,x))+(-1)^{i+1}\frac{1}{2}g_i(t,x,\theta_1)\theta_1+(-1)^i\frac{1}{2}\int_0^t g_i(s,p_i,\theta_1(s,p_i))\theta_i(s,p_i)ds-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t f_{i.}(s,p_i,\theta_1(s,p_i))\theta_1(s,p_i)ds-\frac{1}{2}\int_0^t r_i(s,p_i,\theta_1(s,p_i))\theta_1(s,p_i)\theta_j(s,p_i)ds+$$

$$+\int_0^t F(s,p_i;\theta_1(s,p_i))ds, \quad i,j=1,2; \quad i\neq j. \quad (14)$$

Покажем, что уравнение (12) имеет в области $G_{n+1}(T)$ при $T<T*$ единственное, непрерывное решение, удовлетворяющее неравенству $\|\theta-\theta_0\|\leq\tilde{M}$, где $\|\theta\|=\max\limits_{0\leq i\leq 3}\max\limits_{(t,x)\in G_2(T)}\{|\theta_i|, \quad i=1,2,3\}.$

Из (13), (14) имеем:

$$|A_1\theta-u_0|\leq\tilde{K}T,$$

$$\left|A_i\theta-\frac{1}{2}\varphi_i\right|\leq\frac{1}{2}(1+T)\alpha_i\tilde{K}+\frac{\tilde{K}T}{2}(\beta_i+\gamma_i\tilde{K})+\|F\|T=\Omega_i(T),$$

где

$$|g_i(t,x,u)|\leq\alpha_i=const, \quad |f_i(t,x,u)|\leq\beta_i=const \quad |r_i(t,x,u)|\leq\gamma_i=const, \quad i=1,2,$$

$$\|\theta\|\leq\|\theta_0\|+\tilde{M}=\tilde{K},$$

Обозначим через $T_0=\dfrac{\tilde{M}}{\tilde{K}}$, T_i- положительные корни уравнения $\Omega_i(T)=\tilde{M}, \quad i=1,2.$

Справедливы следующие оценки

$$\left|A_1\theta^1 - A_1\theta^2\right| \le T\left\|\theta^1 - \theta^2\right\|,$$
$$\left|A_i\theta^1 - A_i\theta^2\right| \le \Theta_i(T)\left\|\theta^1 - \theta^2\right\|, \quad i = 1,2,$$
где
$$\Theta_i(T) = \frac{1}{2}\left(\alpha_i + L_i\tilde{K}\right) + \frac{T}{2}\left(L_i\tilde{K} + \alpha_i + M_i\tilde{K} + \beta_i + K_i\tilde{K}^2 + 2\gamma_i\tilde{K} + 2L)\right) + N\|K\|\frac{T^2}{2},$$
$$\left|g_i(t,x,u_1) - g_i(t,x,u_2)\right| \le L_i\left|u_1 - u_2\right|, \quad L_i \ge 0, \quad L_i - const, \quad i = 1,2$$
$$\left|f_i(t,x,u_1) - f_i(t,x,u)\right| \le M_i\left|u_1 - u_2\right|, \quad M_i \ge 0, \quad M_i - const, \quad i = 1,2.$$
$$\left|r_i(t,x,u_1) - r_i(t,x,u)\right| \le K_i\left|u_1 - u_2\right|, \quad K_i \ge 0, \quad K_i - const, \quad i = 1,2.$$

Положительные корни уравнений $\Theta_i(T) = 1,\ i = 1,2$ обозначим через T_3, T_4.

Отсюда следует, что оператор A при $T < T^* = \min\{T_0, T_1, T_2, T_3, T_4\}$ осуществляет сжатое отображение шара $S(\theta_0, \tilde{M})$ на себя. Следовательно, по принципу сжимающих отображений система уравнений (4), (5) имеет одно и только одно решение.

Теорема доказана.

Литература

1. *Иманалиев М. И.* Нелинейные интегро-дифференциальные уравнения с частными производными [Текст] / М. И. Иманалиев. – Бишкек: Илим, 1992. – 112 с.
2. *Иманалиев М. И.* К теории нелинейных уравнений с дифференциальным оператором типа полной производной по времени [Текст] / М. И. Иманалиев, С. Н. Алексеенко // Доклады Российской АН. – 1993. –Т. 329. – № 5. – С. 543–546.
3. *Иманалиев М. И.* К теории нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных типа Кортевега - де Фриза [Текст] / М. И. Иманалиев, П. С. Панков, Т. М. Иманалиев // Доклады Российской АН. – 1995. – Т. 342. – № 1. – С. 17–19.
4. *Ашырбаева А. Ж.* Решение нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка методом дополнительного аргумента [Текст] / А. Ж. Аширбаева. – Бишкек: Илим, 2013. – 134 с.