Оптимизация добычи и распределения сырья между потребителями в зависимости от периода

Асанкулова М.[1], Жусупбаев А.[2]

[1]*Асанкулова Майрам / Asankulova Mayram - кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник;*
[2]*Жусупбаев Амангельди / Djusupbaev Amangeldi - доктор физико-математических наук, заведующая лабораторией экономико-математических методов,*
Институт теоретической и прикладной математики,
Национальная академия наук Кыргызской Республики, г. Бишкек, Кыргызская Республика

***Аннотация**: в работе сформулирована математическая модель задачи определения оптимального объема добычи сырья компанией и ее распределение между потребителями в котором затраты на добычу единицы объема сырья и ее транспортировку, затраты на переработку сырья в продукцию и цена реализации единицы объема продукции зависит от периода добычи сырья и его переработки. Для решения сформулированной задачи предложен метод решения.*

***Abstract:** the paper formulated a mathematical model of the problem of determining the optimal amount of extraction of raw materials the company and its distribution among the consumers in which the cost of production volume unit of raw material and its transportation, processing costs of raw materials in the production and selling price of a unit of production volume depends on raw material extraction period and its processing. To solve the above problem is provided a method of solution.*

***Ключевые слова:** математическая модель, транспортировка, объем сырья, метод аппроксимации, договор, компания, предприятия.*

***Keywords:** mathematical model, transportation, the amount of raw materials, the approximation method, a contract company.*

УДК 519.8

Постановка задачи. Пусть имеется компания, состоящая из m пунктов добычи сырья A_i, $i\in I=\{1,2,...,m\}$. Объем добываемого сырья на каждом пункте добычи предполагается неизвестным x_i^t, но ограниченным сверху величиной a_i^t, $i\in I$, $t=1,2,..., T$.

Сырье, добываемое компанией, согласно договора, должно перевозиться перерабатывающим предприятиям Π_k, k=1,2,…,p ассоциации и потребителям Gr, r=1,2,…,R по единой закупочной цене.

Исходя из договора, компания должна доставлять ассоциации за весь планируемый период сырье в объеме Q_0, в том числе каждому предприятию за период t, $t=1,2,..., T$ в объеме не более чем d_k^t, $k=1,2,...,p$, $t=1,2,...,T$, а частным потребителям региона G_r, $r=1,2,...,R$ - в объеме равным b_r^t, $r=1,2,...,R$, $t=1,2,..., T$.

Сырье, доставляемое предприятиям ассоциации, перерабатывается в продукцию и реализуется в том же периоде t, $t = 1,2,...,T$.

Предполагаются, что затраты на добычу единицы объема сырья и ее транспортировка, затраты на переработку сырья в продукцию и цена единицы объема реализуемой продукции зависит от периода добычи сырья и его переработки.

Требуется определить объем добычи сырья для пунктов компании

$x_i^t \geq 0$, $i\in I$, $t=1,2,..., T$, план распределения сырья между предприятиями ассоциации и потребителями региона так, чтобы суммарные затраты на добычу, перевозку сырья были бы минимальными, а для перерабатывающих предприятий ассоциации - чистый доход от реализации готовой продукции из доставляемого сырья после переработки.

Для формулировки математической модели задачи введем следующие обозначения: i -индекс пунктов добычи сырья компании, $i\in I$; I-множество индексов пунктов добычи сырья; r-индекс потребителей сырья региона, $r=1,2,...,R$; k-индекс перерабатывающих предприятий ассоциации, $k=1,2,...,p$; t-индекс периода добычи сырья компании, где сырье доставляется предприятиям ассоциации и потребителям региона, $t=1,2,..., T$.

Известные параметры и функции:

a_i^t -максимальный объем добычи сырья i-го пункта компании в t-ом периоде, $t=1,2,..., T$, $i\in I$; d_k^t – максимально возможный объем сырья, перевозимый компанией k-му предприятию ассоциации за t-ый период по договору, $k=1,2,...,p$, $t=1,2,..., T$; Q_0 - объем сырья, поставляемый компанией предприятиям ассоциации за планируемый период; b_r^t – объем сырья, поставляемый компанией *r*-му потребителю региона за *t*-ый период, *r=1,2,…,R*, *t=1,2,…, T;* $\varphi_i^t(x_i^t)$ - функция, отражающая зависимость стоимости добываемого сырья от объема добычи *i*-го пункта в *t*-ом периоде, $i \in I$, *t=1,2,…, T;* c_{ik}^t, c_{ir}^t – транспортные расходы на перевозку единицы объема сырья из *i*-го пункта добычи в *k*-ое предприятие ассоциации и *r*-му потребителю региона в *t*-ом периоде соответственно, $i \in I$, *k=1,2,…,p*, *r=1,2,...,R*, *t=1,2,…, T;* c_k^t - оптовая_цена реализации готовой продукции *k*-ым предприятием в *t*-ом периоде, *k=1,2,…,p*, *t=1,2,…, T;* λ_k^t – норма расхода сырья на единицу объема готовой продукции в *k*-ом предприятии ассоциации в *t*-ом периоде, *k=1,2,…,p*, *t=1,2,…, T;* ε_k^t - затраты на переработку единицы объема сырья в *k*-ом предприятии на *t*-ом периоде, *k=1,2,…,p*, *t=1,2,…, T*.

Искомые переменные:

x_{ik}^t - объем сырья, перевозимый компанией из *i*-го пункта добычи *k*-му предприятию ассоциации перерабатывающих предприятий в *t*-ом периоде, $i \in I$, *k=1,2,…,p*, *t=1,2,…, T;* x_{ir}^t - объем сырья, перевозимый компанией из *i*-го пункта добычи *r* -му потребителю региона в *t*-ом периоде, $i \in I$, *r=1,2,…,R*, *t=1,2,…, T;* x_i^t - объем сырья, добываемый *i*-ым пунктом компании в *t*-ом периоде, $i \in I$, *t=1,2,…, T;* y_k^t - объем готовой продукции *k*-го предприятии ассоциации в *t*-ом периоде, *k=1,2,…,p*, *t=1,2,…, T*.

В соответствии с принятыми обозначениями математическая модель задачи определения оптимального объема добычи сырья компанией и ее распределение между потребителями по критерию минимума суммарных затрат на добычу сырья и перевозку запишется в виде.

Найти минимум

$$L(x) = \sum_{i \in I} \sum_{t=1}^{T} \{ (\sum_{k=1}^{p} c_{ik}^t x_{ik}^t + \sum_{r=1}^{R} c_{ir}^t x_{ir}^t) + \varphi_i^t (x_i^t) \} \qquad (1)$$

при условиях

$$\sum_{r=1}^{R} x_{ir}^t + \sum_{k=1}^{p} x_{ik}^t = x_i^t, \quad i \in I, \ t=1,2,\dots, T, \qquad (2)$$

$$0 \le x_i^t \le a_i^t, \quad i \in I, \ t=1,2,\dots, T, \qquad (3)$$

$$0 \le \sum_{i \in I} x_{ik}^t \le d_k^t, \quad k=1,2,\dots, p, \ t=1,2,\dots, T, \qquad (4)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{k=1}^{p} \sum_{t=1}^{T} x_{ik}^t = Q_0, \qquad (5)$$

$$\sum_{i \in I} x_{ir}^t = b_r^t, \quad r=1,2,\dots, R, \ t=1,2,\dots, T, \qquad (6)$$

$$x_{ik}^t \ge 0, \quad x_{ir}^t \ge 0, \quad i \in I, \ k=1,2,\dots, p, \ r=1,2,\dots, R, \ t=1,2,\dots, T, \qquad (7)$$

где

$$x = \left| \left\| x_{ik}^t \right\|_{|I|,p}, \quad \left\| x_{ir}^t \right\|_{|I|,R}, \ \text{t=1,2,..., T} \right|.$$

Предполагается, что имеет место условие

$$\sum_{t=1}^{T} \sum_{r=1}^{R} b_r^t + Q_0 \le \sum_{t=1}^{T} \sum_{i \in I} a_i^t. \qquad (8)$$

Согласно принятым обозначениям математическая модель задачи определения оптимального объема готовой продукции и чистого дохода предприятиями ассоциации в каждом периоде могут быть записана в виде.

Найти максимум

$$D(\tilde{o}, y) = \sum_{\hat{e}=1}^{\eth} (\tilde{n}_{\hat{e}}^t y_k^t - \sum_{i \in I} \varepsilon_k^t x_{ik}^t), \quad t = 1,2,\dots,T \qquad (9)$$

при условиях

$$\lambda_k^t y_k^t = \sum_{i\in I} x_{ik}^t, \quad k=1,2,\ldots,p,\ t=1,2,\ldots,T, \qquad (10)$$

$$x_{ik}^t \geq 0,\ \ i\in I,\ \ k=1,2,\ldots,p,\ t=1,2,\ldots,T, \qquad (11)$$

$$y_k^t \geq 0, \quad k=1,2,\ldots,p,\ t=1,2,\ldots,T, \qquad (12)$$

где

$$x=\left|x_{ik}^t\right|_{|I|,p},\ \ t=1,2,\ldots,T,\ \ \mathrm{y}=\left|\mathrm{y}_\mathrm{k}^\mathrm{t}\right|_{1,p}.$$

Из постановки задачи легко заметить, что задача (1)-(7) и (9)-(12) может быть решена последовательно.

Метод решения. Рассмотрим способ решения задачи (1)-(7) в случае, когда функция $\varphi_i^t(x_i^t)$ - выпуклая непрерывно возрастающая по $x_i^t \in[0, a_i^t]$, $i\in I$, $t=1,2,\ldots, T$.

Выпуклые функции $\varphi_i^t(x_i^t)$, $i\in I$, $t=1,2,\ldots, T$ заменим кусочно-линейными функциями. Используем способ, приведенный в [1], [2], [3].

Разбиваем интервалы $[0, a_i^t]$ на l_i^t, $t=1,2,\ldots, T$ равных частей с шагом $h_i^t = a_i^t / l_i^t$ $i\in I$, $t=1,2,\ldots, T$. Построим кусочно-линейную аппроксимацию функции $\varphi_i^t(x_i^t)$, $i\in I$, $t=1,2,\ldots, T$. Переменные x_i^t заменяем через $z_{i\nu}^t$ следующим образом:

$$x_i^t = \sum_{\nu=1}^{l_i^t} z_{i\nu}^t, \quad i\in I,\ t=1,2,\ldots,T, \qquad (13)$$

где

$$0 \leq z_{i\nu}^t \leq h_i^t, \quad i\in I,\ t=1,2,\ldots,T. \qquad (14)$$

Преобразовав неравенства (14) в равенства, имеем

$$h_i^t = z_{i\nu}^t + \xi_{i\nu}^t, \quad i\in I,\ t=1,2,\ldots,T \qquad (15)$$

где

$$\xi_{i\nu}^t \geq 0, \quad \mathrm{z}_{i\nu}^t \geq 0, \quad \nu=1,2,\ldots,l_i^t,\ i\in I,\ t=1,2,\ldots, T.$$

Функцию $\varphi_i^t(x_i^t)$ представим приближенно в виде

$$\varphi_i^t(x_i^t) \cong \sum_{\nu=1}^{l_i^t}\{\varphi_i^t(\nu h_i^t) - \varphi_i^t((\nu-1)h_i^t)\}\frac{z_{i\nu}^t}{h_i^t}, \ i\in I,\ t=1,2,\ldots, T. \qquad (16)$$

Из системы (13) и (15) получим

$$z_{i\nu}^t = h_i^t - \xi_{i\nu}^t, \quad \nu=1,2,\ldots,l_i^t,\ i\in I,\ t=1,2,\ldots,T,$$

$$x_i^t = \sum_{\nu=1}^{l_i^t}(h_i^t - \xi_{i\nu}^t), \quad i\in I,\ t=1,2,\ldots,T. \qquad (17)$$

Подставляя (17) в систему ограничений (2), получаем

$$\sum_{r=1}^{R} x_{ir}^t + \sum_{k=1}^{p} x_{ik}^t + \sum_{\nu=1}^{l_i^t} \xi_{i\nu}^t = a_i^t, \quad i\in I,\ t=1,2,\ldots, T, \qquad (18)$$

где

$$0 \leq \xi_{i\nu}^t \leq h_i^t, \quad \nu=1,2,\ldots,l_i^t,\ i\in I,\ t=1,2,\ldots,T.$$

Суммируя по i и t равенства (2) и (13), а (6) по r и t, далее используя (5), получим

$$\sum_{t=1}^{T}\sum_{r=1}^{R} b_r^t + Q_0 = \sum_{t=1}^{T}\sum_{i\in I}\sum_{\nu=1}^{l_i^t} z_{i\nu}^t \geq 0. \qquad (19)$$

Подставляя значение $\varphi_i^t(x_i^t)$ из (16) в целевую функцию задачи, получим

$$L(x) = \sum_{i\in I}\sum_{t=1}^{T}\{(\sum_{k=1}^{p} c_{ik}^t x_{ik}^t + \sum_{r=1}^{R} c_{ir}^t x_{ir}^t) + \sum_{\nu=1}^{l_i^t} \frac{\Delta\varphi_{i\nu}^t}{h_i^t} z_{i\nu}^t\},$$

где

$$\frac{\Delta\varphi_{i\nu}^t}{h_i^t} = \frac{\varphi_i^t(\nu h_i^t) - \varphi_i^t((\nu-1)h_i^t)}{h_i^t}, \quad \nu = 1,2,...,l_i^t, \;\; i \in I, \;\; t = 1,2,...,T.$$

$\frac{\Delta\varphi_{i\nu}^t}{h_i^t}$ - угловые коэффициенты соответствующих звеньев кусочно-линейных функций $\varphi_i^t(x_i^t)$, $i\in I$, $t=1,2,\dots, T$.

Таким образом, окончательно имеем следующую задачу.

Найти минимум

$$L(x) = \sum_{i\in I}\sum_{t=1}^{T}\{(\sum_{k=1}^{p} c_{ik}^t x_{ik}^t + \sum_{r=1}^{R} c_{ir}^t x_{ir}^t) + \sum_{\nu=1}^{l_i^t} \frac{\Delta\varphi_{i\nu}^t}{h_i^t} z_{i\nu}^t\} \tag{20}$$

при условиях

$$\sum_{r=1}^{R} x_{ir}^t + \sum_{k=1}^{p} x_{ik}^t + \sum_{\nu=1}^{l_i^t} \xi_{i\nu}^t = a_i^t, \quad i\in I, \; t=1,2,\dots, T, \tag{21}$$

$$\sum_{i\in I} x_{ik}^t \le d_k^t, \quad k=1,2,\dots, p, \; t=1,2,\dots, T, \tag{22}$$

$$\sum_{i\in I} x_{ir}^t = b_r^t, \quad r=1,2,\dots, R, \; t=1,2,\dots, T, \tag{23}$$

$$\sum_{i\in I}\sum_{k=1}^{p}\sum_{t=1}^{T} x_{ik}^t = Q_0, \tag{24}$$

$$\sum_{t=1}^{T}\sum_{i\in I}\sum_{\nu=1}^{l_i^t} z_{i\nu}^t = \sum_{t=1}^{T}\sum_{r=1}^{R} b_r^t + Q_0, \tag{25}$$

$$z_{i\nu}^t + \xi_{i\nu}^t = h_i^t, \quad \nu=1,2,...,l_i^t, \; i\in I, \; t = 1,2,...,T \tag{26}$$

$$x_{ir}^t \ge 0, \quad x_{ik}^t \ge 0, \quad i\in I, \; k = 1,2,...,p, \; r = 1,2,...,R, \; t = 1,2,...,T, \tag{27}$$

$$z_{i\nu}^t \ge 0, \quad \xi_{i\nu}^t \ge 0, \quad \nu=1,2,...,l_i^t, \quad i\in I, \; t=1,2,\dots, T. \tag{28}$$

Задачу (20)-(28) при помощи запрещающих тарифов можно свести к закрытой модели транспортной задачи линейного программирования. Введем дополнительные переменные $x_{0k}^t \ge 0$, $k=1,2,\dots, p$, $t=1,2,\dots, T$, и обращаем систему неравенств (22) в равенства.

Определим объем фиктивного поставщика

$$\sum_{t=1}^{T}\sum_{k=1}^{p} x_{0k}^t = \sum_{t=1}^{T}\sum_{k=1}^{p} d_k^t - Q_0.$$

Решив задачу (20)-(28) получим оптимальный план перевозок $\overline{x}_{ik}^t \ge 0$, $i\in I$, $k=1,2,\dots, p$, $t=1,2,\dots, T$, $\overline{x}_{ir}^t \ge 0$, $i\in I$, $r=1,2,\dots, R$, $t=1,2,\dots, T$, и объемы добычи сырья каждого пункта компании на каждом периоде $\overline{x}_i^t = \sum_{\nu=1}^{l_i^t} z_{i\nu}^t$, $i\in I$, $t=1,2,\dots, T$, удовлетворяющий условиям (21)-(28) и доставляющий минимальное значение целевой функции (20).

Далее, используем решение $\overline{x}_{ik}^t \ge 0$, $i\in I$, $k=1,2,\dots, p$, $t=1,2,\dots, T$ задачи (20)-(28) для задачи (9)-(12).

Сформулируем экстремальную задачу следующего вида.

Найти максимум

$$D(y) = \sum_{\hat{e}=1}^{\eth}(\tilde{n}_{\hat{e}}^t y_k^t - \sum_{i\in I}\varepsilon_k^t \overline{x}_{ik}^t), \quad t = 1,2,...,T \tag{29}$$

при условиях

$$\lambda_k^t y_k^t = \sum_{i \in I} \overline{x}_{ik}^t, \quad k=1,2,\ldots, p, \ t=1,2,\ldots, T, \qquad (30)$$

$$y_k^t \geq 0, \quad k=1,2,\ldots, p, \ t=1,2,\ldots, T. \qquad (31)$$

Решив задачу (29)-(31), получим оптимальный план $\overline{y}_k^t \geq 0$, *k=1,2,…, p, t=1,2,…, T,* выпуска готовой продукции каждого предприятия ассоциации на каждом периоде и чистый доход ассоциации при договорных условиях работы.

Литература

1. *Ланге Э. Г., Жусупбаев А.* Комбинаторный метод решения задачи размещения. – Фрунзе, Илим, 1990. -153 с.
2. *Хедли Дж.* Нелинейное и динамическое программирование. – М.: Мир, 1967. -506 с.
3. *Асанкулова М*. Методы решения транспортно-производственной задачи. – Бишкек, Илим, 2012. – 159 с.