Экономические приложения теории экстремумов функций двух переменных
Ляликова Е. Р.

Ляликова Елена Реомировна / Ljalikova Elena Reomirovna - кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математического анализа,
Институт математики, механики и компьютерных наук,
Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону

Аннотация: *статья посвящена применению методов решения задач на нахождение локального экстремума, локального условного экстремума и задач на наибольшее и наименьшее значения для функций двух переменных в экономике.*
Abstract: *article focuses on the application of methods for solving the problem of finding the local extremum, local and conditional extremum, problems on the maximum and minimum values of functions of two variables in the economy.*

Ключевые слова: *функция двух переменных, локальный экстремум, локальный условный экстремум, наибольшее и наименьшее значение функции, функция издержек, функция прибыли, математическая модель.*
Keywords: *function of two variables, local extremum, local conditional extremum, the largest and smallest value of the function, cost function, profit function, mathematical model.*

Все чаще в последнее время, ведя математический анализ у студентов гуманитарных факультетов, приходится отвечать на вопрос: «Где можно в рамках конкретно их специализации применить знания, полученные при изучении вышеозначенного курса, не лишние ли эти знания случайно?» И наоборот, студентам-математикам интересно знать, в каких областях есть приложения, изучаемых ими фундаментальных теорий. Поэтому в арсенале у лектора всегда должны быть примеры, ярко освещающие данные проблемы. С этой целью в данной статье я хочу коснуться экономических приложений такой важной темы, как «Экстремумы функций двух переменных».

Вот несколько задач экономического содержания, иллюстрирующие применение навыков нахождения локального экстремума, условного локального экстремума с «простым» и «сложным» условием связи, а также задачи на наибольшее и наименьшее значения функции.

Задачи на максимизацию прибыли.

Пусть x_1, x_2 – количества производимых двух разновидностей товара, а их цены соответственно – P_1, P_2 (постоянные величины). Пусть затраты на производство этих товаров задаются функцией издержек $S(x_1, x_2)$. Тогда функция прибыли ([2], с. 178) имеет вид: $\Pi = P_1 x_1 + P_2 x_2 - S(x_1, x_2)$.

Очевидно, что для нахождения максимальной прибыли, необходимо решить задачу на локальный экстремум функции двух переменных при $x_i \geq 0$ (при отсутствии других ограничений). А, значит, нужно найти сначала точки, подозрительные на экстремум из условия: $\dfrac{\partial \Pi}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1,2$. Это условие приводит к системе алгебраических уравнений относительно переменных x_i : $P_i - \dfrac{\partial S}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1,2$. Заметим, что полученная система уравнений реализует известное правило экономики: предельная стоимость (цена P_i) товара равна предельным издержкам $\dfrac{\partial S}{\partial x_i}$ на его производство. Далее, все найденные точки нужно проверить на наличие в них экстремумов при помощи достаточного условия.

Задача № 1. Пусть производятся два вида товаров, обозначим их количества через x и y. Пусть $P_1 = 8, \quad P_2 = 10$ у. е. – цены на эти товары соответственно, а $C = x^2 + xy + y^2$ – функция затрат на их производство. Найти количество товаров первого и второго видов, при котором прибыль будет максимальной.

Решение. Составим математическую модель задачи. Здесь будет полезно упомянуть о роли математической модели в развитии формализации экономической теории ([2], с. 11). Прибыль является функцией двух переменных: $П(x,y) = 8x + 10y - x^2 - xy - y^2, \quad x, y \geq 0$. Чтобы ответить на вопрос задачи, нужно решить задачу на обычный экстремум функции 2-х переменных. Находим критические точки из условия:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial П}{\partial x} = 8 - 2x - y = 0 \\ \dfrac{\partial П}{\partial y} = 10 - x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$$

Итак, заданная функция имеет единственную стационарную точку М (2; 4). Проверим, является ли она экстремальной. Для этого вычислим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 П}{\partial x^2}(M) = -2 := A, \quad \frac{\partial^2 П}{\partial y^2}(M) = -2 := B, \quad \frac{\partial^2 П}{\partial x \partial y}(M) = -1 := C.$$

Тогда $\Delta(M) = A \cdot B - C^2 = 4 - 1 = 3 > 0$, следовательно, М – точка локального экстремума, причем она является точкой локального максимума, так как $A < 0$. Таким образом, товар первого вида в количестве 2 штук и товар второго вида в количестве 4 штук обеспечат максимальную прибыль 28 у. е.

А вот еще одна задача на максимизацию прибыли в несколько иной постановке:

Задача № 2. Фирма продает единственный товар на двух рынках. Функции спроса (функции зависимости количества приобретаемого товара от его цены ([2], с. 178)) на этих рынках линейны и имеют вид соответственно: $q_1 = 15{,}75 - 0{,}25p_1; \quad q_2 = 21 - 0{,}2p_2$, где p_1, p_2 – цены на эти товары соответственно. Функция затрат имеет вид: $C = 20 + 15q$, где $q = q_1 + q_2$. Определить цены, при которых фирма получит максимальную прибыль.

В данном случае функция прибыли зависит не от количества товара, а от его цены и имеет вид:

$$П(p_1, p_2) = q_1 p_1 + q_2 p_2 - C =$$
$$= (15{,}75 - 0{,}25p_1)p_1 + (21 - 0{,}2p_2)p_2 - (20 + 15(q_1 + q_2))$$

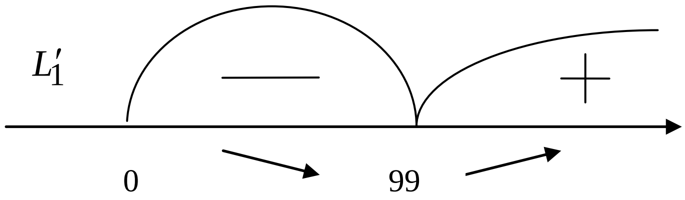
Ну а теперь перед нами снова задача на обычный локальный экстремум функции 2-х переменных. Решить ее предоставляется читателю самостоятельно.

Минимизация затрат

Задача № 3. Фирма реализует автомобили двумя способами: через оптовую и розничную торговлю. При реализации x автомобилей в розницу расходы на реализацию составляют $4x + x^2$ у. е., а при продаже y автомобилей оптом – y^2 у. е. Найти оптимальный способ реализации автомобилей, минимизирующий суммарные расходы, если общее число предназначенных для продажи автомобилей составляет 200 шт.

Решение. Составим математическую модель задачи. Функция $L(x,y) = 4x + x^2 + y^2$ – суммарные расходы при реализации. По условию требуется найти минимум функции L. Так как для продажи предназначено 200 автомобилей, то x и y связаны между собой условием связи: $x + y = 200, \ x \geq 0, y \geq 0$. Таким образом, получили задачу на условный экстремум с «простым» условием связи.

Для решения такого типа задач, как известно из курса математического анализа, нужно из условия связи выразить одну переменную через другую, например, y через x: $y = 200 - x$ и подставить полученное выражение в функцию $L(x,y)$. Тогда последняя превратится в функцию одной переменной $L_1(x) = 4x + x^2 + (200 - x)^2, \ x \geq 0$. Таким образом, задача на условный экстремум для функции $L(x,y)$ перешла в задачу на обычный экстремум для функции $L_1(x)$. Решаем ее: $L_1'(x) = 4x - 396$, $x = 99$ – стационарная точка. Из рисунка видно, что $x = 99$ является



точкой локального минимума функции $L_1(x)$, а, значит, точка с координатами (99; 101) является точкой условного локального минимума функции $L(x,y)$. Поэтому оптимальный способ реализации автомобилей – это 99 автомобилей в розницу и 101 автомобиль оптом. Расходы при этом составят 20398 у. е.

Задача потребительского выбора

Будем считать, что потребитель располагает доходом I. Учитывая структуру цен, доход и собственные предпочтения, потребитель приобретает определенное количество некоторых благ, и математическая модель такого его поведения называется *моделью потребительского выбора* ([2], с. 135-136). Рассмотрим модель с двумя видами продуктов. Потребительский набор – это вектор (x_1, x_2), координаты которого x_i – количество единиц i-го продукта. Выбор потребителя характеризуется отношением предпочтения, то есть про каждые два набора он может сказать, что какой-то из них более желателен, либо он не видит между ними разницы. На множестве потребительских наборов (x_1, x_2) определена функция $u(x_1, x_2)$, называемая *функцией полезности потребителя* ([2], с.137), значение которой на потребительском наборе (x_1, x_2) равно потребительской оценке индивидуума для этого набора. *Задача потребительского выбора* ([2], с. 137-140) заключается в выборе такого потребительского набора (x_1, x_2), который максимизирует его функцию полезности при заданном бюджетном ограничении. *Бюджетное ограничение* означает, что денежные расходы на продукты не могут превышать денежные доходы, то есть $p_1x_1 + p_2x_2 \le I$, где p_1, p_2 – рыночные цены на первый и второй товары соответственно.

Задача № 4. Оптимальный набор потребителя составляет 6 единиц продукта x_1 и 8 единиц продукта x_2. Определите цены потребляемых благ, если известно, что доход потребителя 240 у. е., и он собирается его истратить весь, а функция полезности имеет вид: $u(x_1, x_2) = x_1x_2$.

Решение. Пусть p_1, p_2 – рыночные цены на первый и второй товары соответственно. Найдем максимум функции полезности $u(x_1, x_2) = x_1x_2$ при ограничениях $p_1x_1 + p_2x_2 = 240, \quad x_1, x_2 \ge 0$.

Для решения этой задачи применим метод Лагранжа. Составим функцию Лагранжа: $L_\lambda(x_1, x_2) = x_1x_2 + \lambda(p_1x_1 + p_2x_2 - 240)$.

Ее стационарные точки являются решениями системы: $\begin{cases} \dfrac{\partial L_\lambda}{\partial x_1} = x_2 + \lambda p_1 = 0 \\ \dfrac{\partial L_\lambda}{\partial x_2} = x_1 + \lambda p_2 = 0 \\ p_1x_1 + p_2x_2 = 240 \end{cases}$

По условию задачи известно, что функция полезности $u(x_1, x_2)$ достигает максимума при $x_1 = 6$ и $x_2 = 8$. Следовательно, точка (6; 8) является точкой локального условного максимума $u(x_1, x_2)$, а, значит, и стационарной точкой функции Лагранжа $L_\lambda(x_1, x_2)$. Поэтому она является решением системы, полученной выше. Подставим точку (6; 8) в систему $\begin{cases} 8 + \lambda p_1 = 0 \\ 6 + \lambda p_2 = 0 \\ 6p_1 + 8p_2 = 240 \end{cases}$. Решая ее, получим $p_1 = 20, \quad p_2 = 15, \quad \lambda = -0{,}4$. Следовательно, цены потребляемых благ первого и второго продукта соответственно равны 20 и 15 у. е.

Задача № 5 (составление плана выпуска продукции). Фирма производит два вида товаров: А и В. Для производства x единиц товара А и y единиц товара В требуется заранее приобрести $g(x, y) = x^2 + y^2 - xy$ (кг) сырья. Из-за ограничений на объем хранилища количество сырья не должно превышать 2100 кг. Доход от реализации единицы товара А составляет 2000 у. е., а от реализации единицы товара В – 1000 у. е. Определить план выпуска продукции, максимизирующей доход.

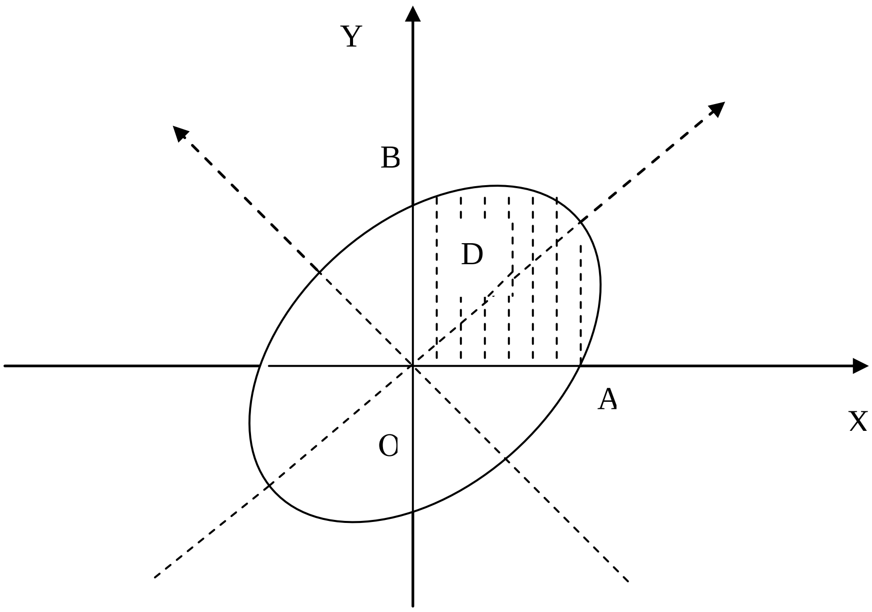
Решение.

Доход фирмы определяется функцией $F(x, y) = 2000x + 1000y$ при ограничениях $x^2 + y^2 - xy \le 2100, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0$ (1).

Условия (1) задают на плоскости область D. Требуется найти точку области, в которой функция $F(x, y)$ достигает наибольшего значения, то есть, имеем задачу на наибольшее и наименьшее значения функции 2-х переменных. Построим область D. Условия (1) задают внутренность кривой второго порядка, лежащую в 1-ой четверти. Здесь полезно будет вспомнить со студентами, как определяется тип кривой 2-го порядка и как привести уравнение $x^2 + y^2 - xy = 2100$ (2)

к каноническому виду. В нашем случае с помощью замены переменных $\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}X - \dfrac{\sqrt{2}}{2}Y \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}X + \dfrac{\sqrt{2}}{2}Y \end{cases}$

уравнение (2) приводится к уравнению $\dfrac{X^2}{(10\sqrt{42})^2} + \dfrac{Y^2}{(10\sqrt{14})^2} = 1$. Таким образом, уравнение (2) задает на плоскости эллипс с центром в начале координат с полуосями $a = 10\sqrt{42}$ и $b = 10\sqrt{14}$, повернутыми на 45^0. Итак область D будет иметь следующий вид:



Наибольшее и наименьшее значения могут достигаться в критических точках, лежащих либо внутри области D, либо на ее границе. Найдем сначала критические точки функции $F(x, y)$, попавшие внутрь области. Так как

$\frac{\partial F}{\partial x} = 2000 \neq 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 1000 \neq 0$, то критических точек внутри области нет. Рассмотрим тогда границу области, она состоит из трех частей. Исследуем сначала границу, являющуюся частью эллипса: $x^2 + y^2 - xy = 2100, \quad x > 0, \quad y > 0$. Для этого составим функцию Лагранжа: $L_\lambda(x, y) = 2000x + 1000y + \lambda(x^2 + y^2 - xy - 2100)$. Найдем ее критические точки:

$$\begin{cases} \frac{\partial L_\lambda}{\partial x} = 2000 + 2\lambda x - \lambda y = 0 \\ \frac{\partial L_\lambda}{\partial y} = 1000 + 2\lambda y - \lambda x = 0 \\ x^2 + y^2 - xy = 2100 \end{cases}$$. Решив эту систему, получим: $$\begin{cases} x = 50 \\ y = 40 \\ \lambda = -\frac{100}{3} \end{cases}$$.

Следовательно, на этой части границы есть критическая точка М (50; 40).

Рассмотрим границу ОА: $y = 0, \quad x \in (0; 10\sqrt{21})$. На этой границе функция $F(x, y)$ превратится в функцию одной переменной: $F_1(x) = 2000x$. Так как $F_1'(x) = 2000 \neq 0$, то на этой части границы критических точек нет. Аналогичная ситуация будет и на границе ОВ: $x = 0, \quad y \in (0; 10\sqrt{21})$. Поэтому наибольшее и наименьшее значения могут достигаться либо в ранее найденной точке М (50; 40), либо в точках О (0; 0), А($10\sqrt{21}$;0) или В (0; $10\sqrt{21}$), которые нами еще не были просмотрены. Найдем значения функции $F(x, y)$ в них и выберем из них наибольшее: $F(M) = 140000, \quad F(O) = 0, \quad F(A) = 20000\sqrt{21}$, $F(B) = 10000\sqrt{21}$. Таким образом, наибольшее значение достигается в точке М. То есть, максимальный доход достигается при производстве товара типа А в количестве 50 единиц и товара типа В – 40 единиц и составляет 140 000 у. е.

В заключение приведу задачу на составление рациона кормления животных на ферме ([1], с. 414), также сводящуюся к решению задачи на наибольшее и наименьшее значение функции двух переменных, которую предоставлю решить самому читателю.

Задача № 6. При составлении суточного рациона кормления животных можно использовать свежее сено (не более 50 кг) и силос (не более 85 кг). Рацион должен обладать определенной питательностью (число кормовых единиц не менее 30) и содержать питательные вещества: белок (не менее 1 кг), кальций (не менее 100 г) и фосфор (не менее 80 г). Определить оптимальный рацион из условия минимизации себестоимости. Данные о содержании питательных веществ в 1 кг каждого продукта и об их себестоимости приведены в таблице:

Продукт	Количество кормовых единиц	Белок г/кг	Кальций г/кг	Фосфор г/кг	Себестоимость у. е./кг
Сено свежее	0,5	40	1,25	2	1,2
Силос	0,5	10	2,5	1	0,8

Литература

1. Сборник задач по высшей математике для экономистов: Учебное пособие. / Под редакцией Ермакова В. И. М.: ИНФРА-М, 2001. 574 с.
2. *Замков О. О., Толстопятенко А. В., Черемных Ю. Н.* Математические методы в экономике. М.: ДИС, 1997. 368 с.